Résistance des Matériaux

Prof Hicham Fihri Fassi
Université Hassan Premier
Faculté des Sciences et Techniques Settat
LST Génie Civil

Chapitre 1. Généralités et définitions

La résistance des matériaux s'intéresse à l'étude des systèmes déformables.

Pour un corps soumis à des forces extérieures les relations de la RDM permettent de déterminer:

- Les efforts intérieurs ou les contraintes qui sont engendrés dans ce corps par les actions mécaniques extérieures données.
- Les déformations qui en résultent.
- Les dimensions des structures étudiées

Deux approches sont envisageables:

1 Calcul de détermination

Connaissant les charges appliquées sur une structure et les conditions de résistance, et les normes en vigueur, la RDM permet de déterminer les dimensions de la structure à utiliser.

2 Calcul de vérification

Pour une structure donnée déjà en service ou non, la RDM permet de vérifier est ce que les critères de résistance ou les normes en vigueur sont respectées.

1-1 Hypothèses

a. Le matériau est considéré :

- **élastique** (le matériau reprend sa forme initiale après un cycle chargement déchargement),
- **linéaire** (les déformations sont proportionnelles aux contraintes),
- **homogène** (le matériau est de même nature dans toute sa masse),
- **isotrope** (les propriétés du matériau sont identiques dans toutes les directions).

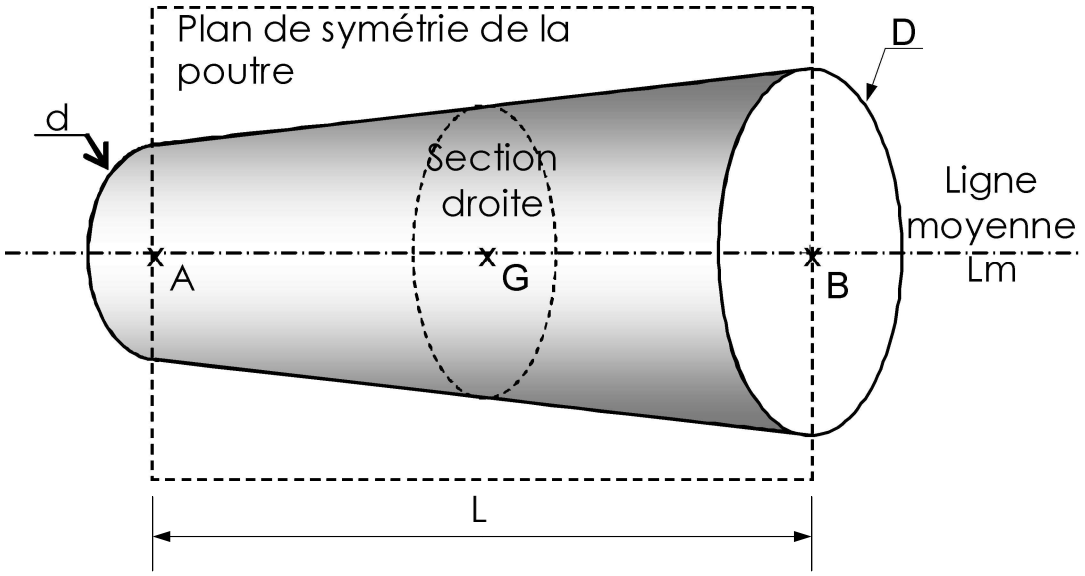
b. Petites déformations, les termes de second ordre et plus seront négligés devant ceux du premier ordre

c. Le solide utilisé vérifie la définition d'une poutre

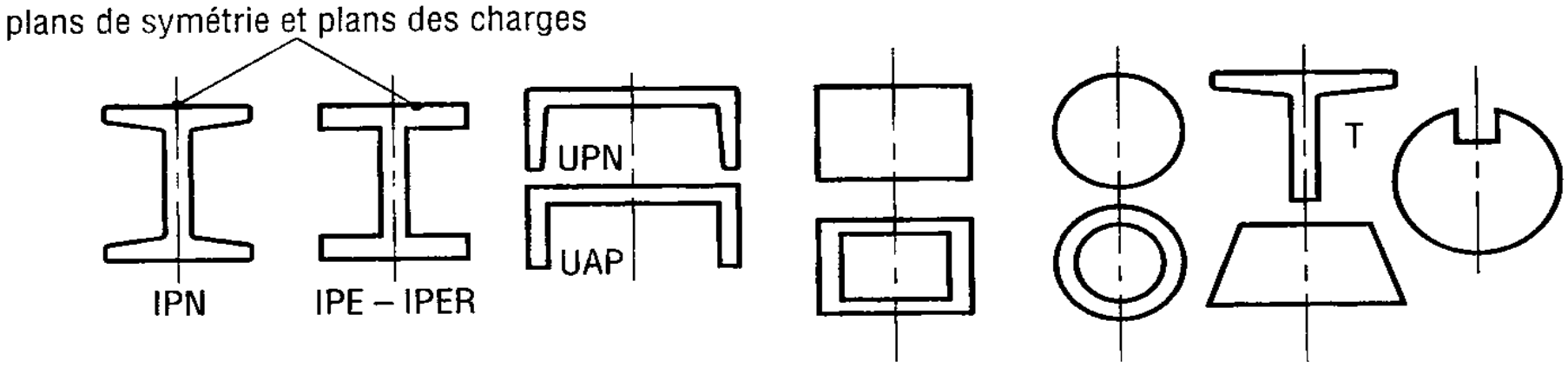
1.2- Notion de poutre

Les caractéristiques de la poutre sont :

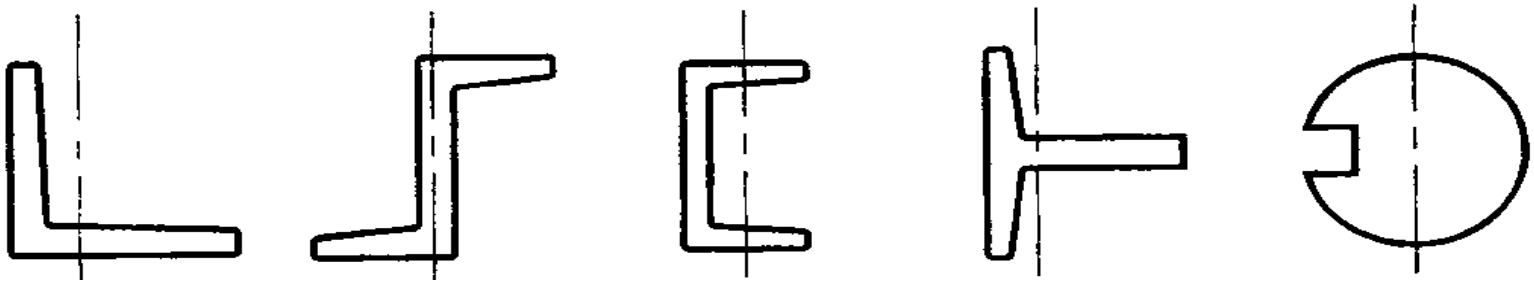
- ligne moyenne droite ou à grand rayon de courbure.
- section droite constante ou variant progressivement.
- grande longueur par rapport aux dimensions transversales.
- existence d'un plan de symétrie.



Exemples de profils de poutres symétriques



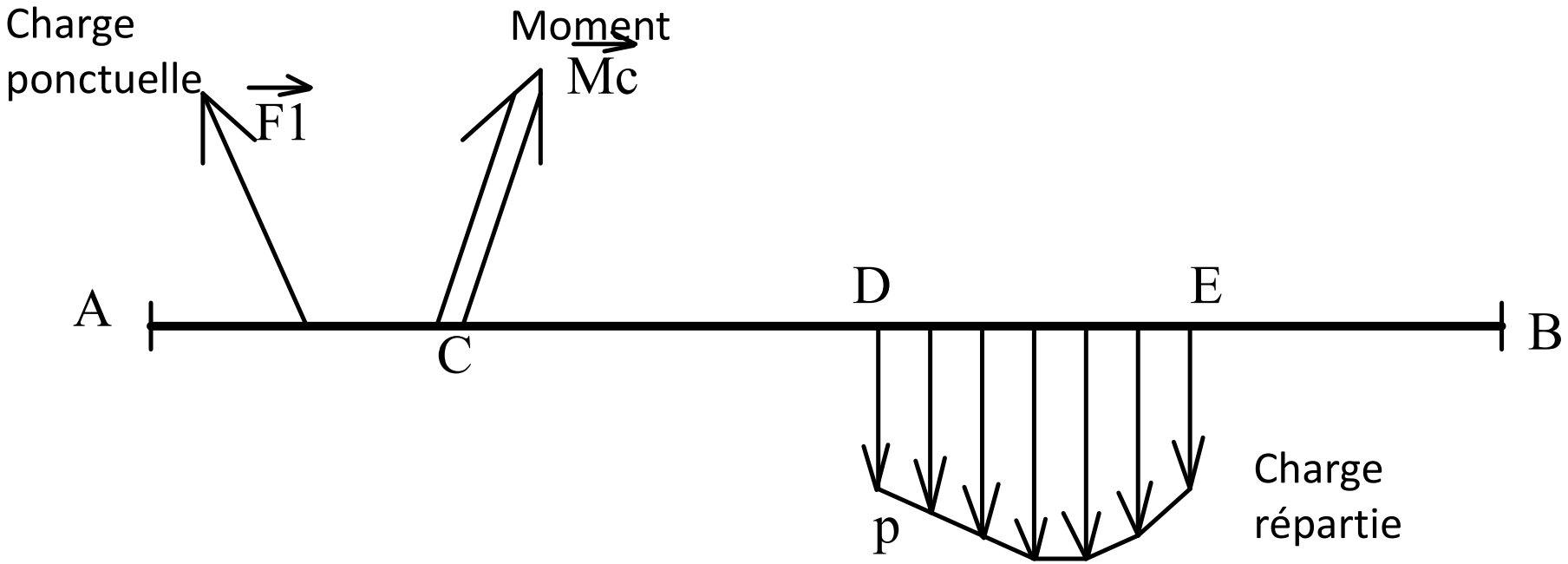
Exemples de poutres ne satisfaisant pas l'hypothèse de symétrie :



1.3- Les forces extérieures

- **Plan de symétrie** : les forces extérieures seront situées dans le plan de symétrie de la poutre ou alors disposées symétriquement par rapport à ce plan.
- **Types d'actions mécaniques extérieures** : deux types d'actions mécaniques peuvent s'exercer sur la poutre (voir fig.) :
- charges concentrées (F1 ou moment Mc)
- charges réparties p sur DE. (exprimées en N/m).

1.4- Les forces extérieures



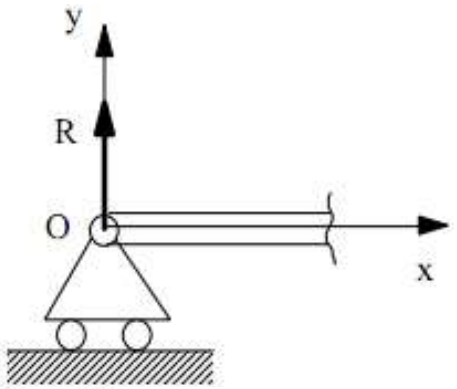
1.5- Les réactions d'appui

une structure est relié au monde extérieur par un certain nombre de liaisons.

Les liaisons dans le plan sont de 3 sortes:

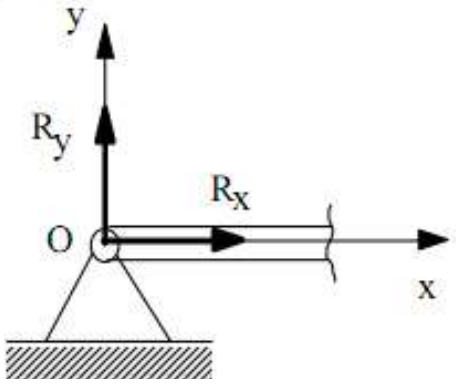
1.5.1 appui simple:

L'appui simple impose un seul blocage de translation, laissant libres les autres degrés de liberté. Il est identique à un contact lisse c.à.d sans frottement.



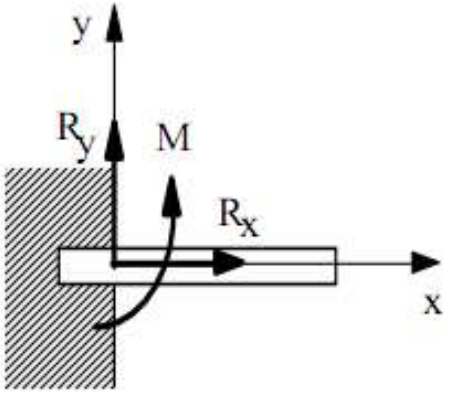
1.5.2 appui articulé:

L'appui articulé s'oppose à toute translation du point d'appui mais laisse au solide la libre rotation autour de ce point.



1.5.3 encastrement:

L'encastrement réalise le blocage de tous les degrés de liberté d'un point de la construction.



1.6-Les efforts internes

Sous l'effet des charges extérieures, les forces entre les particules d'un corps en équilibre varient, en RDM, on appelle cette variation des forces efforts internes

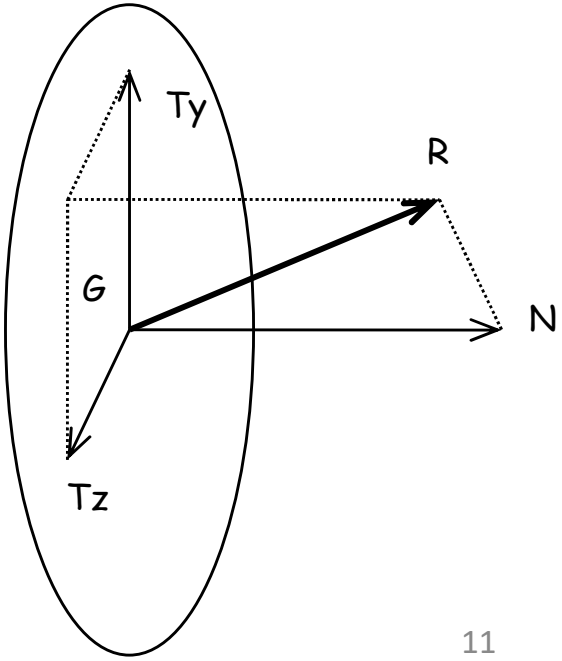
pour faciliter l'étude des efforts on considère une section transversale, les efforts intérieurs répartis sur toute la section peuvent être rapportés à un point(ex:centre de gravité)

La résultante

N : effort normal, projection de R sur la normale extérieure (x).

Ty et Tz : efforts tranchants, projections de R sur le plan de section droite.

$$\vec{R}_R \begin{vmatrix} N \\ Ty \\ Tz \end{vmatrix}$$



Le moment résultant

De la même manière, on retrouve pour les moments, 3 composantes :

- **MT** : moment de torsion, projection du moment sur la normale extérieure.
- **Mfy et Mfz** : moments de flexion, projection du moment sur le plan de section droite.

soit :

$$\vec{M}_G \Big|_R \begin{array}{|c} Mt \\ Mfy \\ Mfz \end{array}$$

1-7 Torseur de cohesion

Le torseur de cohésion peut s'écrire:

$$\left\{ C_G \right\}_R = \begin{vmatrix} N & M_{tx} \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{vmatrix}$$

Les éléments (N, Ty, Tz, MT, Mfy et Mfz) sont appelés éléments de réduction du torseur C

1.8 Les sollicitations

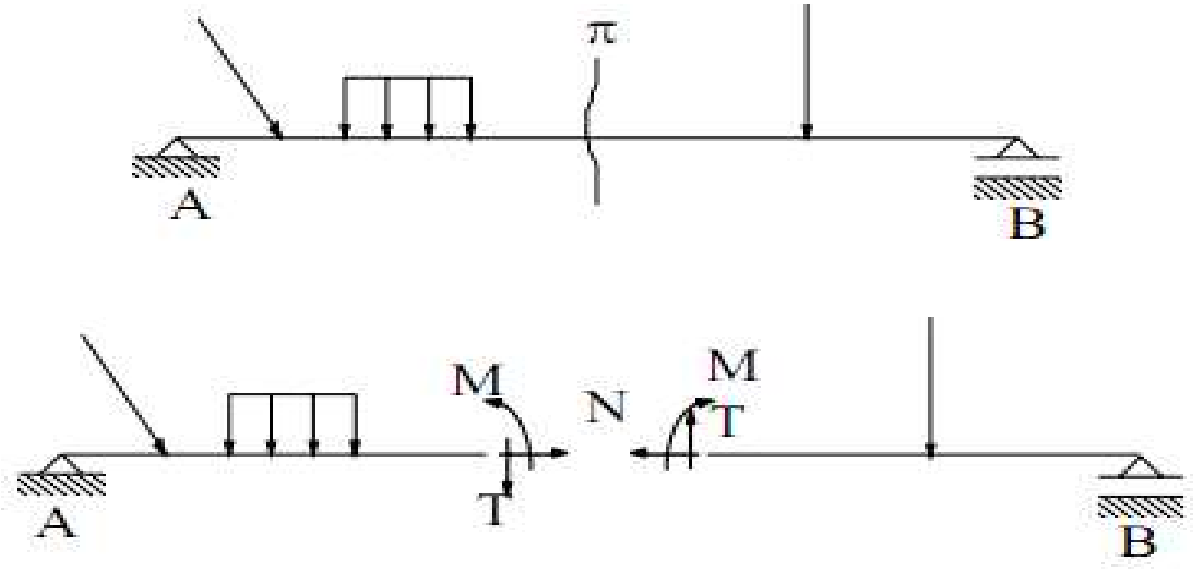
Suivant les éléments de réduction non-nuls du torseur de cohésion (N, Ty, Tz, MT, Mfy et Mfz) on peut alors identifier le type de sollicitation que subit la poutre. Le tableau ce dessous résume les différents types de sollicitations en fonction des éléments de réduction non nuls:

Composante		sollicitation	Commentaire	exemple
N	>0	Extension	Allongement longitudinal, on *tire* de chaque côté	Cable
	<0	compression	Raccourcissement, on *appuie* de chaque côté	poteau supportant un plancher
Ty		cisaillement	Glissement relatif des sections	rivet
Tz				
Mt		torsion	Rotation par glissement relatif des sections droites	arbre de transmission d'un moteur
Mfy		flexion	Fléchissement sans allongement des fibres contenues dans le plan moyen	planche de plongeoir
Mfz				

1.9 - méthode des sections

- Pour déterminer les forces intérieures qui apparaissent dans un élément soumis à une sollicitation, on se sert,en RDM, de la méthode des sections.
- Cette méthode est basée sur le fait que si un élément est en équilibre, sous l'action des forces extérieures, alors n'importe quelle partie de cet élément sous l'action des forces qui lui sont appliquées, est équilibré par un système de forces intérieures agissant dans la section.

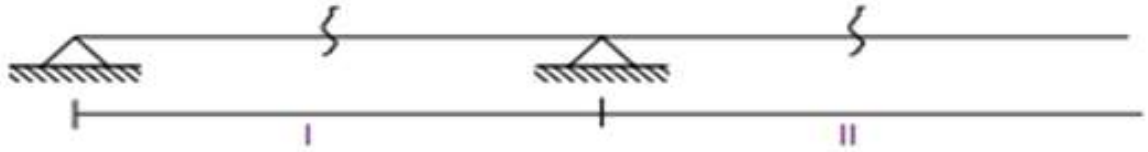
On considère l'élément AB plan, soumis à l'action d'un système de forces extérieures. Pour calculer les efforts et moments dans n'importe quelle section, on coupe à l'endroit voulu l'élément AB en deux parties. les valeurs numériques des efforts N,T,et M sont égaux aux sommes algébriques des projections et des moments des forces extérieures agissant sur une des parties (gauche ou droite) de l'élément sectionné, généralement sur celle où les projections et moments se calculent plus facilement.



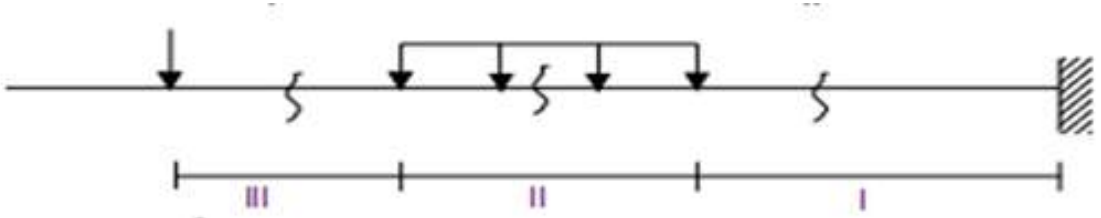
1.10 les zones des efforts internes dans une poutre

Les variations d'un effort ou moment dans une zone(ou tronçon) d'une poutre est caractérisée par une même loi mathématique. En pratique l'extrémité d'une zone est selon les critères suivants:

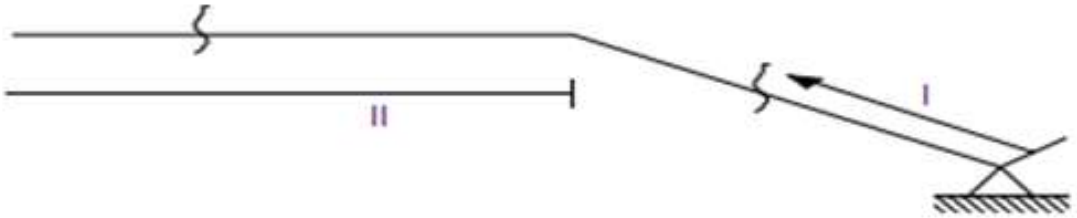
changement des appuis



Changement brutale de la charge



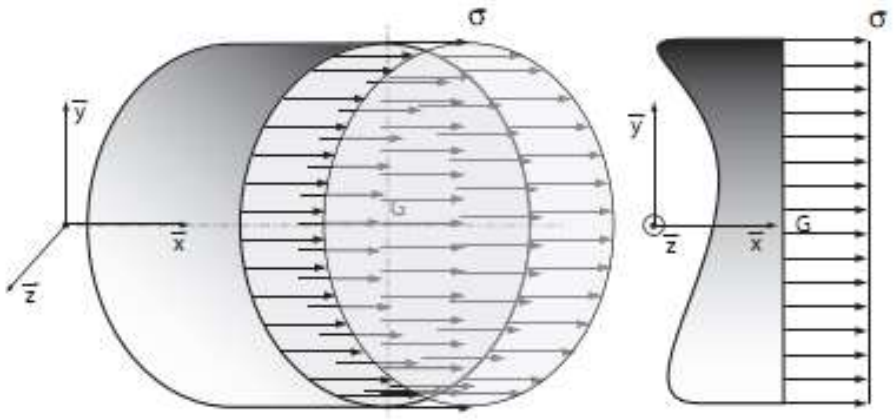
ou changement brutal de la direction de l'axe de la poutre



Chapitre 2 traction

1. Définition

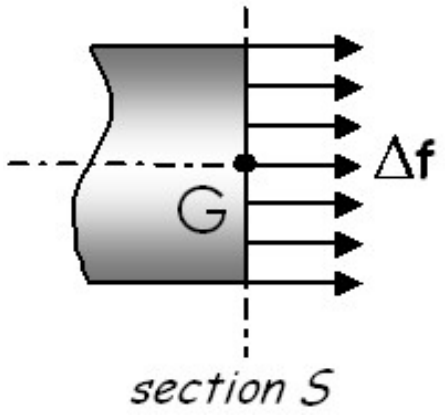
Une poutre est sollicitée en traction lorsque les actions aux extrémités se réduisent à deux forces égales et opposées, portées par la ligne moyenne.



2. Contrainte normale

Chaque élément de surface ΔS supporte un effort de traction Δf parallèle à la ligne moyenne.
Si on suppose une répartition uniforme des contraintes dans la section droite. D'où :

$$\sigma = \frac{N}{S}$$



σ : Contrainte normale en MPa ou en N/mm²
N : effort normal en N
S : aire de la section droite en mm²

3. Déformation

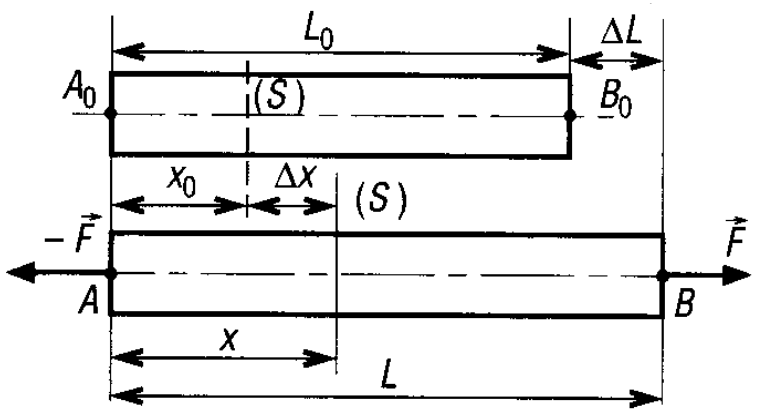
Soient :

L_0 : longueur initiale de la poutre (en mm)

L : longueur de la poutre après déformation (en mm)

ΔL : Allongement de la poutre (en mm)

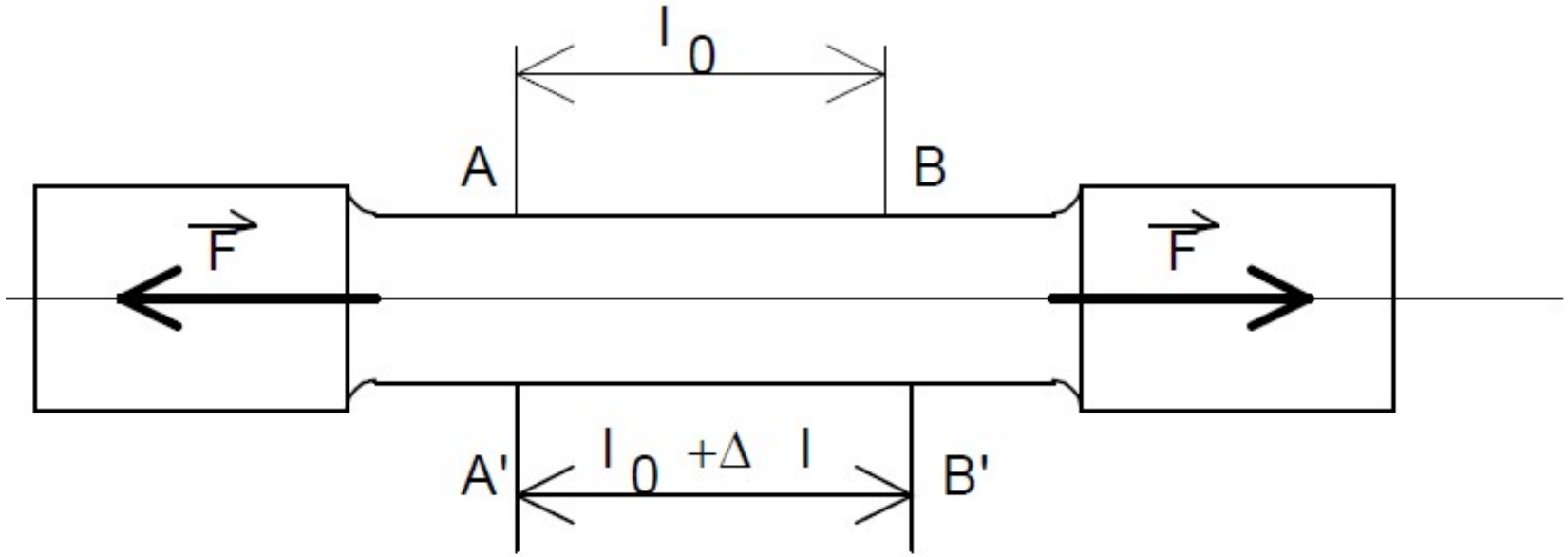
ε : Allongement relc



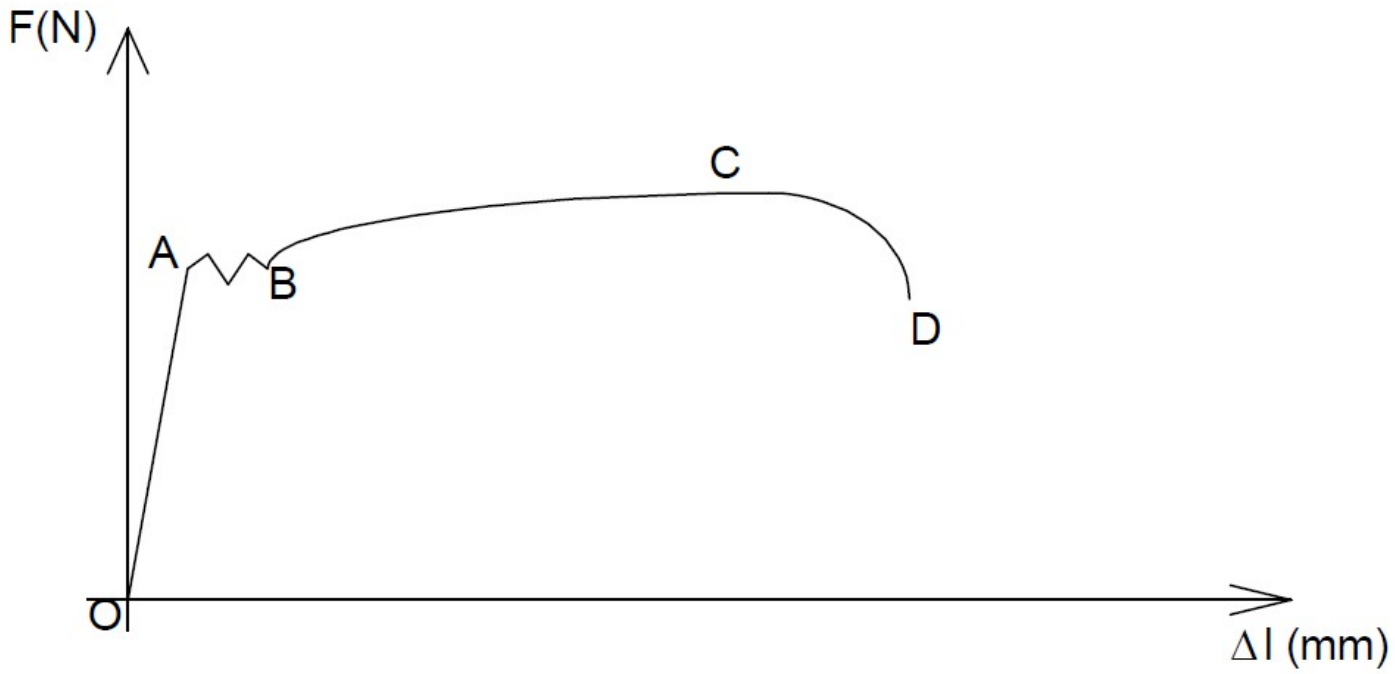
$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\Delta L}{L_0} \qquad ou \quad \Delta L = \varepsilon . L_0$$

4. Essai d'extension

Une éprouvette en acier est sollicitée à l'extension par une machine d'essai, qui permet de déterminer l'allongement de l'éprouvette en fonction de l'effort qui lui est appliqué.



L’essai d’extension permet de tracer la courbe caractérisant le comportement du matériaux . La figure suivante montre l’allure générale de cette courbe pour un matériaux donné.



Analyse de la courbe obtenue

 Zone OA : c'est la zone des déformations élastiques. Si l'on réduit la valeur de F jusqu'à une valeur nulle, l'éprouvette retrouve sa longueur initiale. Dans cette zone, l'allongement est proportionnel à l'effort d'extension. Des essais effectués avec des éprouvettes de dimensions différentes permettent de constater que pour un même matériau, *l'allongement unitaire(Δl / l0) est proportionnel à l'effort unitaire (F / S0)*.

Les sections droites et planes de l'éprouvette restent droites et planes pendant l'essai.

 Zone ABCD : c'est la zone des déformations permanentes. Si l'on réduit la valeur de F jusqu'à une valeur nulle, l'éprouvette ne retrouve pas sa longueur initiale. On ne s'intéressera (pour l'instant) qu'à la zone des déformations élastiques**.**

La *propriété de proportionnalité, constatée ci-dessus, de la déformation élastique par rapport à la charge* a permis pour différents matériaux d'établir la relation :

$$\frac{N}{S} = E\frac{\Delta l}{l}$$

Unités :

F en Newton
S en mm^2
E en MPa (N/mm^2)
Δl et l en mm.

E est une caractéristique du matériau appelée **module d'élasticité longitudinal** ou **module de Young**.

Matériau	Fontes	Aciers	Cuivre	Aluminium	Tungstène
E (MPa)	60000à160000	200000	120000	70000	400000

Lors de cet essai, on met aussi en évidence une autre caractéristique de l'élasticité ; il existe un rapport constant entre la contraction relative transversale ($\Delta d/d$) et l'allongement relatif longitudinal ($\Delta l / l$).

On peut écrire

$$\frac{\Delta d}{d} = \nu\frac{\Delta l}{l}$$

ν est aussi une caractéristique du matériau (coefficient de Poisson), il est de l'ordre de 0,3 pour les métaux.

5.Caractéristiques mécaniques d'un matériau

 Contrainte limite élastique en extension σe

C'est la valeur limite de la contrainte dans le domaine élastique, appelée aussi limite d'élasticité Re.

 Contrainte limite de rupture en extension σr

C'est la valeur limite de la contrainte avant rupture de l'éprouvette, appelée aussi nommée résistance à la traction R.

 Allongement A%

$$A\% = \frac{l - l_0}{l_0} * 100$$

avec :

l0 : longueur initiale de l'éprouvette.

l : longueur de l'éprouvette à sa rupture.

6 loi de comportement: Loi de Hooke:

En déformation élastique, la contrainte σ varie linéairement en fonction de l'allongement relatif **ε** .

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

σ : contrainte normale en N/mm^2

E : module d'élasticité longitudinale , module d'Young en Mpa

ε : allongement relatif (pas d'unité)

7 Condition de résistance

La condition de résistance exprime le fait que la contrainte maximale dans la poutre reste inférieure ou égale à la résistance pratique à la traction Rpe:

$$\sigma_{\max} \leq R_{pe}$$

avec

$$R_{pe} = \frac{R_e}{S}$$

Re est la limite élastique du matériau

S le coefficient de sécurité

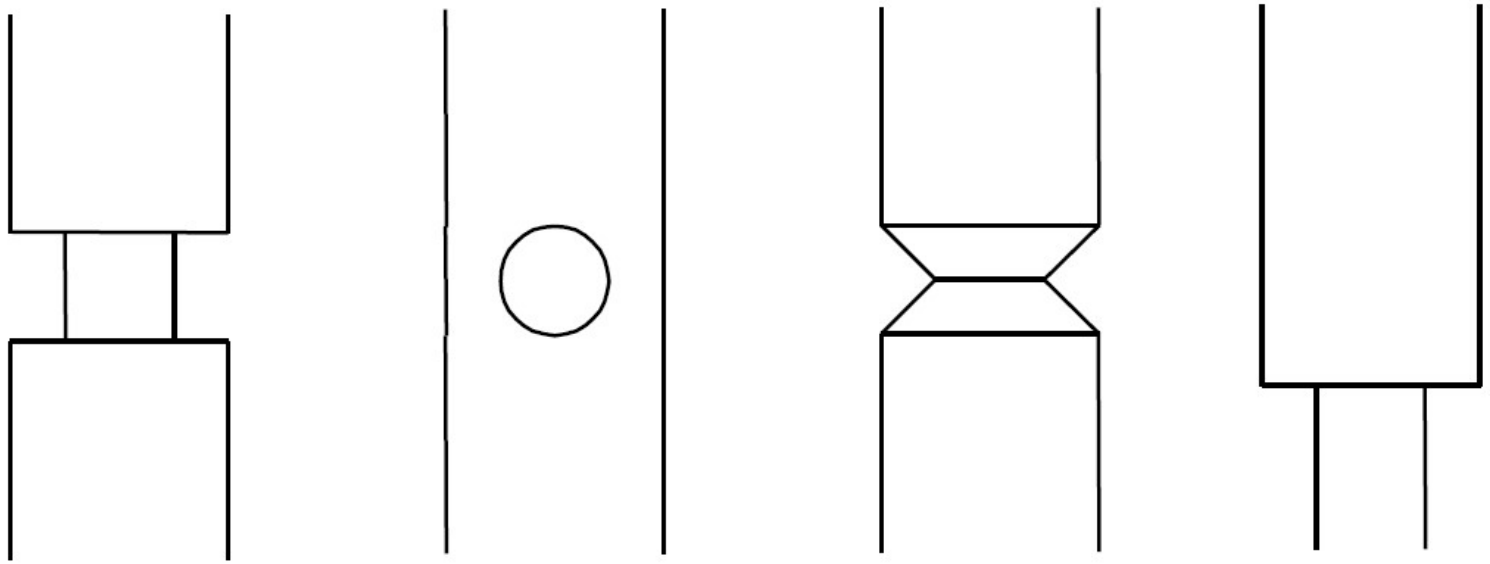
8. Influence des variations de section

Si le solide étudié présente de fortes variations de sections, les relations précédentes ne s'appliquent plus. On dit qu'il y a concentration de contraintes.
On doit alors pondérer nos résultats à l'aide d'un coefficient k, en posant :

$$\sigma_{max} = k.\sigma$$

k est le coefficient de concentration de contraintes

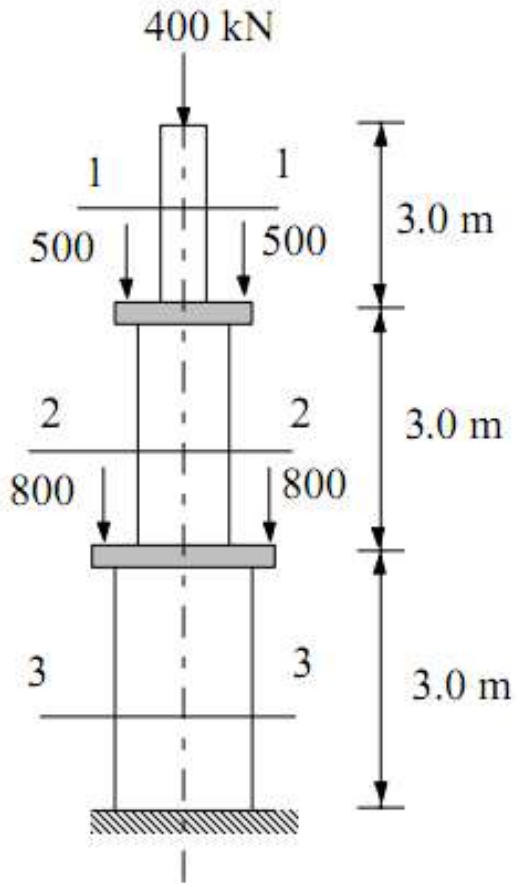
Exemples de variations de section



Exercices(traction/compression)

Exercice1:

Déterminer les efforts, les contraintes et les déformations dans les différentes tronçons de la colonne représentée à coté sachant que: $d_{1\text{-}1}$= 50 mm, $d_{2\text{-}2}$=100mm,$d_{3\text{-}3}$=200mmet E=2.1x10^5 N/mm^2.



Solution:

Section 1-1

$$N + 400 = 0 \Rightarrow N = -400KN$$

$$\sigma = \frac{N}{S} = \frac{-400 \times 10^3}{\pi \times (25)^2} = -203.7N/mm^2$$

$$\Delta L_{AB} = \frac{\sigma L}{E} = \frac{-203.7 \times 3000}{2.1 \times 10^5} = -2.91mm$$

Section 2-2

$$N + 400 + 2 \times 500 = 0 \Rightarrow N = -1400KN$$

$$\sigma = \frac{N}{S} = \frac{-1400 \times 10^3}{\pi \times (50)^2} = -178.3N/mm^2$$

$$\Delta L_{BC} = \frac{\sigma L}{E} = \frac{-178.3 \times 3000}{2.1 \times 10^5} = -2.55mm$$

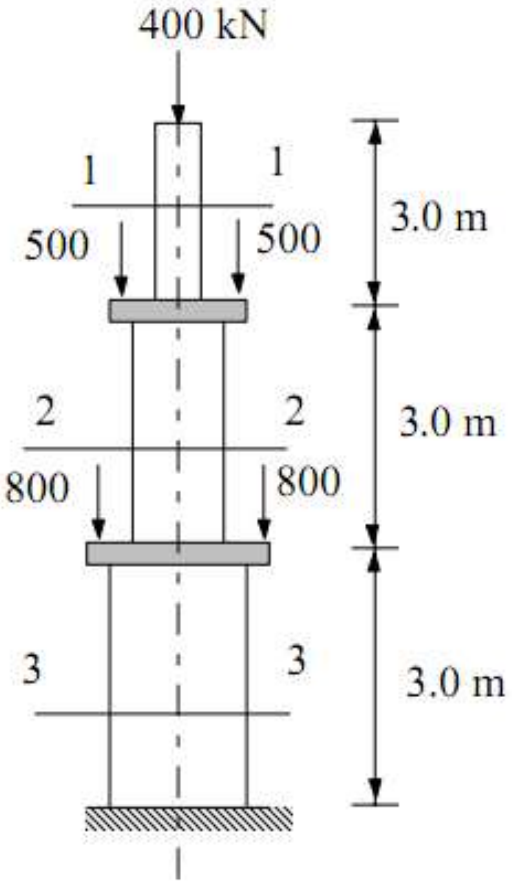
Section 3-3

$$N + 400 + 2 \times 500 + 2 \times 800 = 0 \Rightarrow N = -3000KN$$

$$\sigma = \frac{N}{S} = \frac{-3000 \times 10^3}{\pi \times (100)^2} = -95.5N/mm^2$$

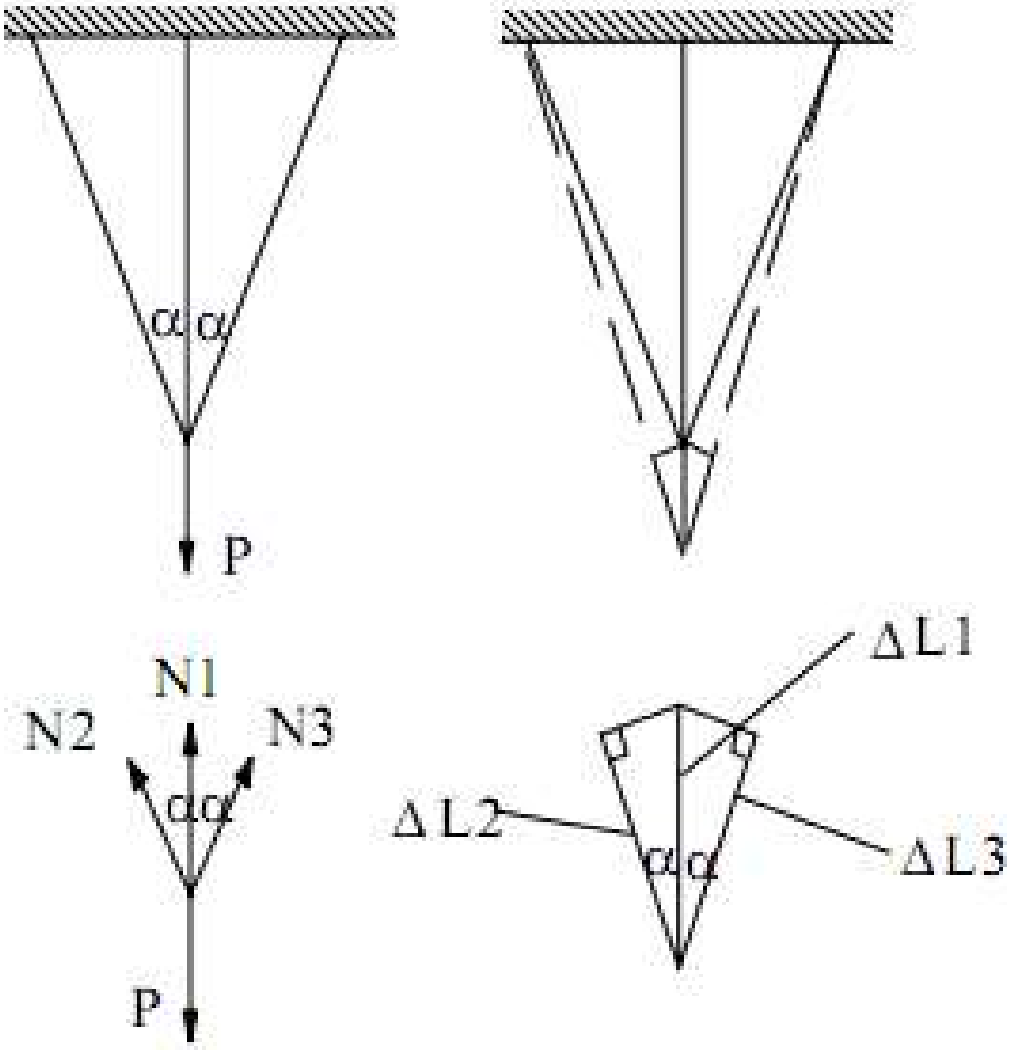
$$\Delta L_{BC} = \frac{\sigma L}{E} = \frac{-95.5 \times 3000}{2.1 \times 10^5} = -1.36mm$$

$$\Delta L_t = -2.91 - 2.55 - 1.36 = -6.82mm$$



Exercice2: Système hyperstatique

- Soit le système de barres défini ci-après,
- étant données: $L_1, S_1, L_2, S_2, L_3, S_3, P$ et avec $L_2 = L_3$
- Déterminer les efforts dans les barres.



Système hyperstatique

Les systèmes hyperstatiques ne peuvent pas être résolus à l'aide des équations statiques, d'autres aspects doivent être considérés pour compléter le nombre d'équations nécessaires à la résolution du problème.

1) **aspect statique**: écrire les équations d'équilibre des barres selectionnées
2) **Aspect géométrique**: établir le rapport entre les déformations à partir de la compatibilité géométrique

3) **Aspect physique du problème**:

établir les relations effort – déformation en utilisant la loi de Hooke pour transformer les expressions de déformation en équations ayant des efforts normaux comme inconnus.

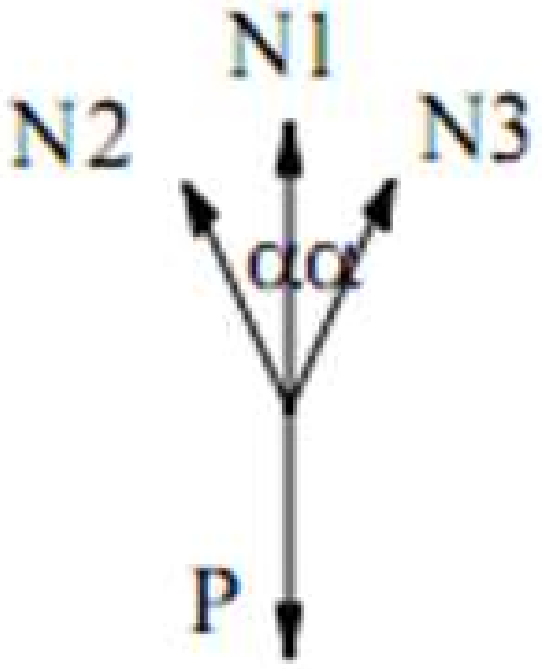
4) Résolution du système d'équations.

Solution:

1) *Aspect statique*:

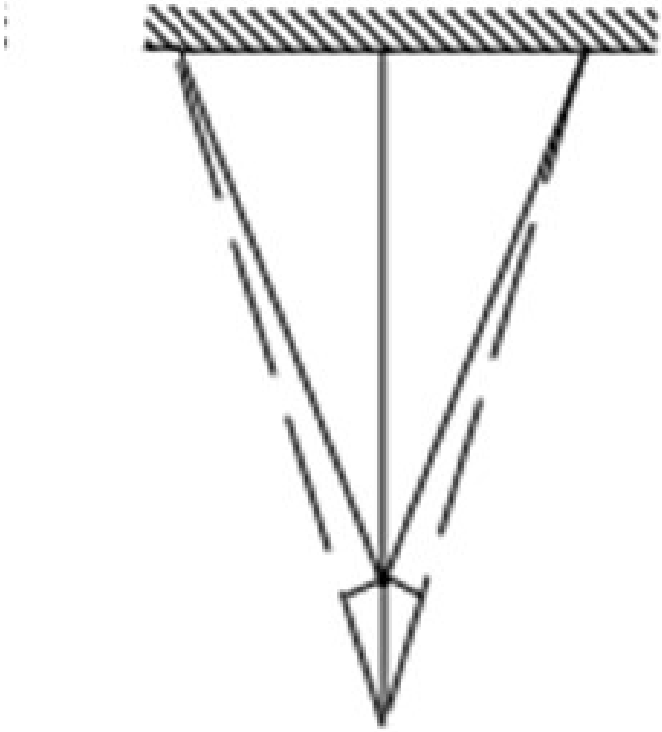
On isole le nœud C et on étudie son équilibre, le principe fondamental de la statique donne les équations suivantes

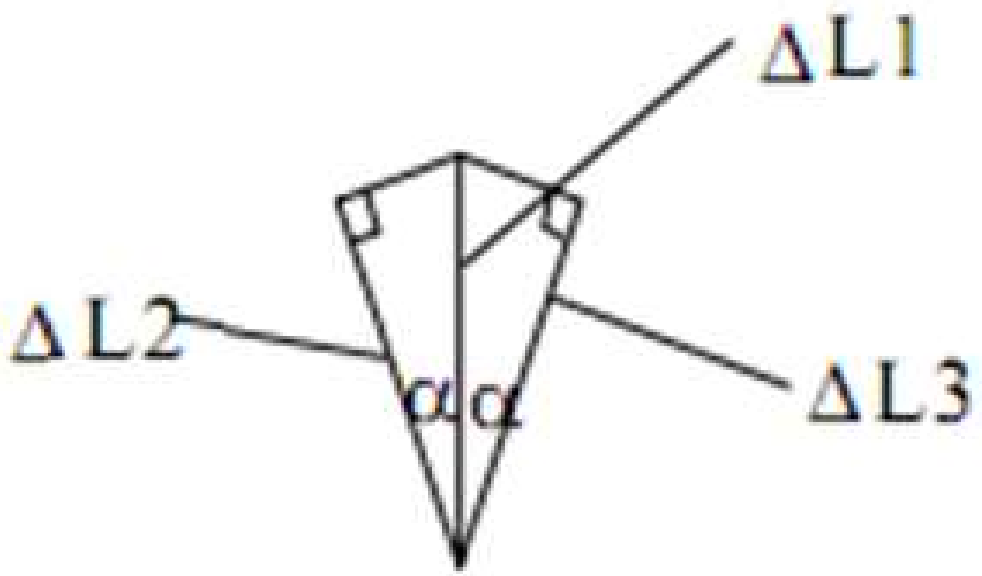
$$\sum Fx = 0$$
$$-N_2 \sin\alpha + N_3 \sin\alpha = 0$$
$$\Rightarrow N_2 = N_3 \qquad (1)$$
$$\sum Fy = 0$$
$$N_1 + N_2 \cos\alpha + N_3 \cos\alpha - P = 0$$
$$\Rightarrow N_1 + 2N_2 \cos\alpha = P\,(2)$$



2) Aspect géométrique

$$\Delta L_2 = \Delta L_3 = \Delta L_1 \cos\alpha \qquad (3)$$





3) Aspect physique

$$\Delta L_1 = \frac{N_1 L_1}{ES} \quad et \quad \Delta L_2 = \frac{N_2 L_2}{ES} \qquad (4)$$

En substituant dans (3), on obtient

$$\frac{N_1 L_1}{ES}\cos\alpha = \frac{N_2 L_2}{ES} \quad \Rightarrow \quad N_2 L_2 = N_1 L_1 \cos\alpha \qquad (5)$$

4) Synthèse et résolution des équations

On élimine N_3 de (2): $$\Rightarrow N_1 + 2N_2 \cos\alpha = P \qquad (6)$$

De (5) on tire: $$N_1 = N_2 \frac{L_2}{L_1 \cos\alpha} \qquad (7)$$

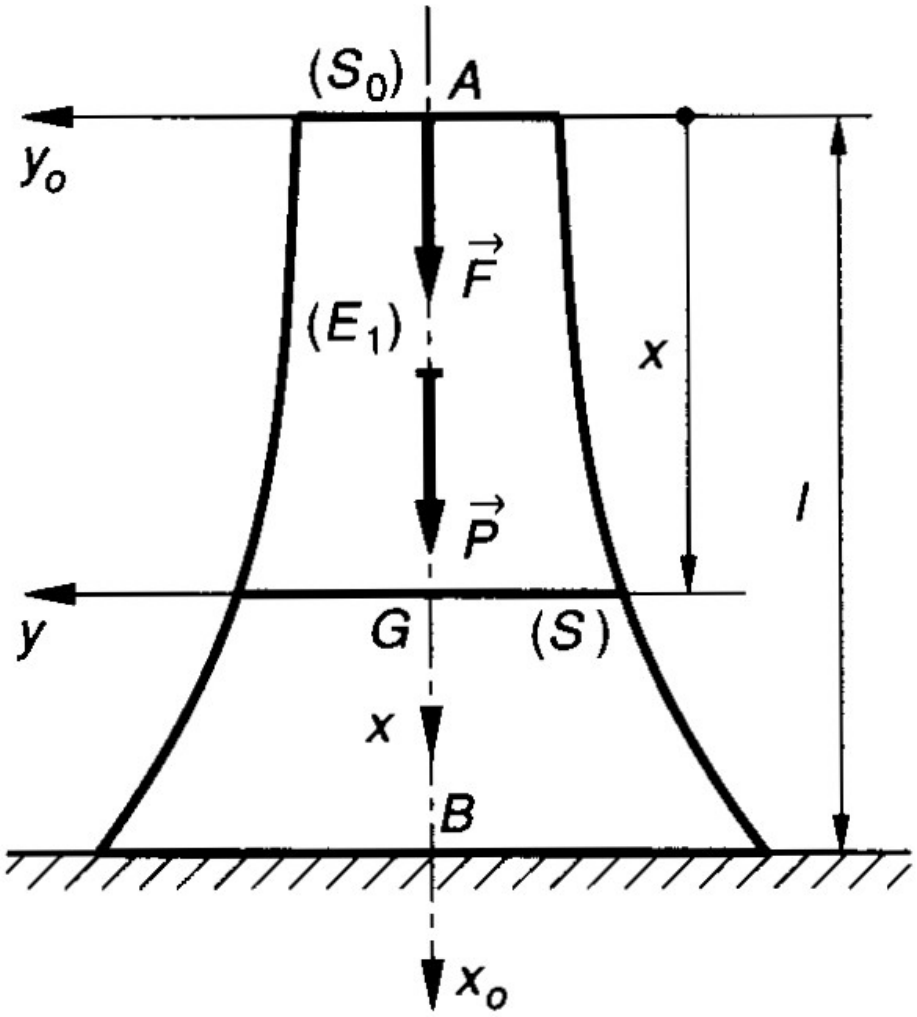
Et en combinant (6) et (7) on aura alors

$$N_1 = \frac{P}{1+2\cos^3\alpha} \quad et \quad N_2 = N_3 = \frac{P\cos^2\alpha}{1+2\cos^3\alpha}$$

Exercice 3 poutre d'égale résistance en compression

Considérons par exemple un pilier vertical de hauteur l dont le matériau a pour poids volumique ϖ. Ce pilier supporte à son extrémité supérieure une charge que l'on peut modéliser en A par un glisseur $\{\mathcal{C}_{ext}\}$ dont la résultante $\vec{F}$ est verticale : $\vec{F} = \|\vec{F}\| \vec{x}_0$

Considérons une section droite (S) d'abscisse x de ce pilier. A quelle loi $S(x)$ doit-elle obéir pour que la contrainte normale en tout point du pilier soit égale en valeur absolue à la contrainte pratique en compression σ_{pc} du matériau? On pose : $|\sigma| = \sigma_{pc}$.


(S_0)
A
y_o
$\vec{F}$
(E_1)
x
l
$\vec{P}$
y
G
(S)
x
B
x_o

— Soit une section droite (S) d'abscisse x dans $\mathcal{R}_0(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

— Soit $\mathcal{R}(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le repère de définition des sollicitations relatif au tronçon (E_1).

— $S(x)$ définit la fonction, aire de la section droite du pilier, fonction de x que l'on recherche.

— Soit $\vec{P}$ le poids du tronçon (E_1) du pilier et V son volume.

— Le torseur des efforts de cohésion dans la section (S) s'exprime par :

$$\{\mathcal{C}_{coh}\} = {}_G\left\{\begin{array}{l} \vec{R} = -(\vec{F} + \vec{P}) \\ \vec{M}_G = \vec{0} \end{array}\right\}.$$

— Exprimons $\vec{R}$ dans $\mathcal{R}(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ en posant : $\|\vec{P}\| = \varpi V$:

$$N = -[\|\vec{F}\| + \varpi V].$$

Ce pilier est donc soumis à une sollicitation de compression dont la contrainte σ (fonction de x) s'exprime par : $\sigma = \frac{N}{S}$

donc $$|\sigma| = \sigma_{pc} = \frac{\|\vec{F}\| + \varpi V}{S},$$

soit $$\sigma_{pc} S = \|\vec{F}\| + \varpi V . \qquad (1)$$

Dans cette relation (1), S est fonction de x et V également.

On notera plutôt : $\sigma_{pc}\, S(x) = \left\| \vec{F} \right\| + \varpi\, V(x)$.

Différentions cette expression :

$$\sigma_{pc}\, \mathrm{d}S = \varpi\, \mathrm{d}V\ .$$

Ecrivons l'expression qui permet de définir l'élément de volume $\mathrm{d}V$:

$$\mathrm{d}V = S\, \mathrm{d}x$$

et donc : $\sigma_{pc}\, \mathrm{d}S = \varpi S\, \mathrm{d}x$ soit : $\dfrac{\mathrm{d}S}{S} = \dfrac{\varpi}{\sigma_{pc}}\, \mathrm{d}x.$

Intégrons les termes de cette relation :

$$\text{Ln } S = \frac{\varpi}{\sigma_{pc}} x + A \, . \qquad (2)$$

Calcul de la constante d'intégration A :
Pour $x = 0$, si on désigne par S_0 la surface au sommet du pilier : $\text{Ln } S_0 = A$.
La relation (2) s'écrira alors :

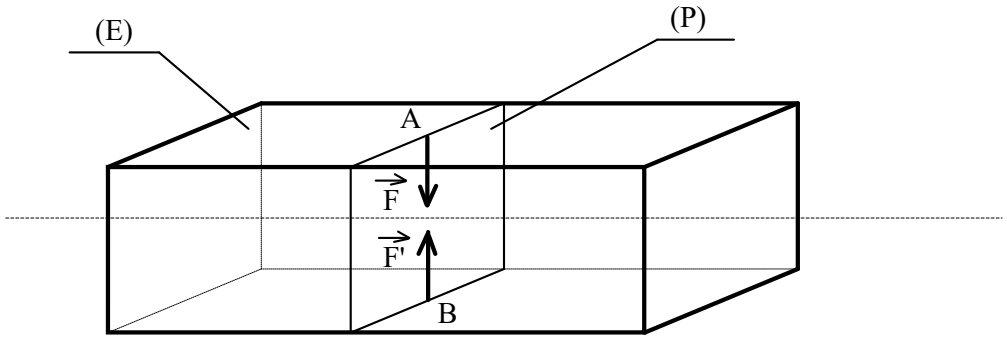
$$\text{Ln } \frac{S}{S_0} = \frac{\varpi}{\sigma_{pc}} x \, , \quad \text{soit : } \boxed{S(x) = S_0 \, e^{\frac{\varpi}{\sigma_{pc}} x}}$$

Une telle section est dite le plus souvent « d'égale résistance » en compression, il serait plus juste de dire « d'égale contrainte ». Bien entendu, peu de constructions obéissent rigoureusement à cette loi mais toutes s'en rapprochent plus ou moins en utilisant des formes en tronc de cône (hautes cheminées) ou en tronc de pyramide (piles de ponts et de viaducs)...

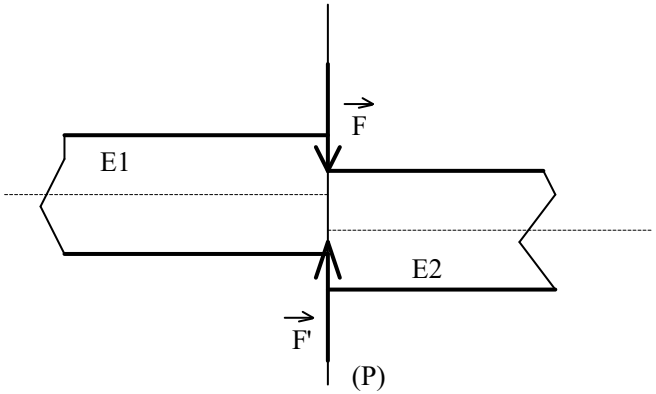
Chapitre 3: Cisaillement

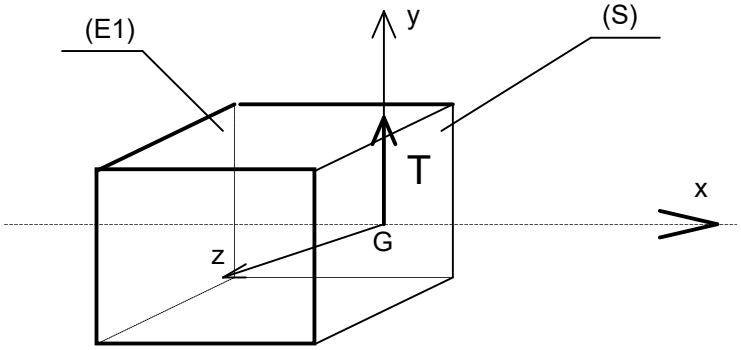
1. Définition

Une poutre subit une sollicitation de cisaillement simple lorsqu'elle est soumise à deux systèmes d'action de liaison qui se réduisent dans un plan (P) perpendiculaire à la ligne moyenne à deux forces directement opposées.



Sous l'action de ces deux forces la poutre tend à se séparer en deux tronçons E1 et E2 glissant l'un par rapport à l'autre dans le plan de section droite (P).



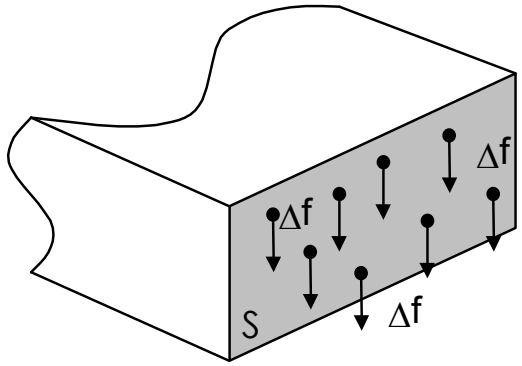


remarques :

- on peut toujours remplacer les composantes d'effort tranchant (Ty et Tz) par une unique composante T en réalisant un changement de repère.
- le cisaillement pur n'existe pas, il subsiste toujours de la flexion...

2. Contrainte de cisaillement

- Chaque élément de surface ΔS supporte un effort de cisaillement Δf contenu dans le plan (S).
- Il y a répartition uniforme des contraintes dans la section droite.



D'où :

$$\tau = \frac{T}{S}$$

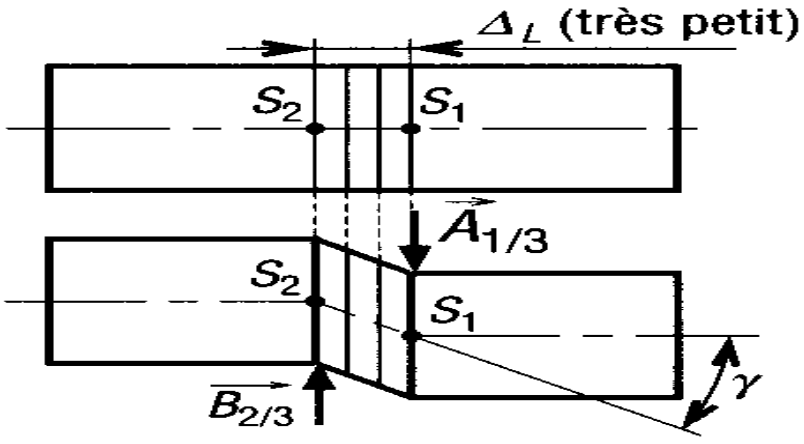
avec : τ : contrainte tangentielle de cisaillement en MPa (valeur moyenne).

T: effort tranchant en Newton.

S : aire de la section droite (S) en mm^2.

3. Loi de hooke

En déformation élastique, la contrainte de cisaillement **ζ** varie linéairement en fonction de l'angle de glissement γ.



$$\tau = G \,.\gamma$$

τ contrainte tangentielle en N/mm²

G : module d'élasticité transversal en Mpa

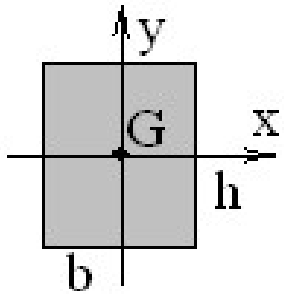
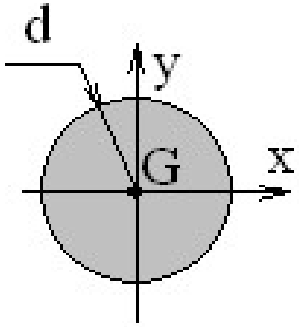
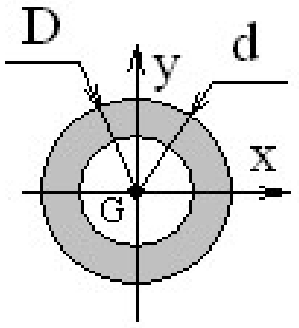
γ : angle de glissement en radians

Moment quadratique

Le moment quadratique de la section S par rapport à l'axe (G,z) noté I_{Gz} est l'intégrale de la distance au carré d'un point de la section droite par rapport à l'axe (G,z). Cette grandeur ne dépend que de la section S.

$$I_{Gz} = \iint_S y^2 dS$$

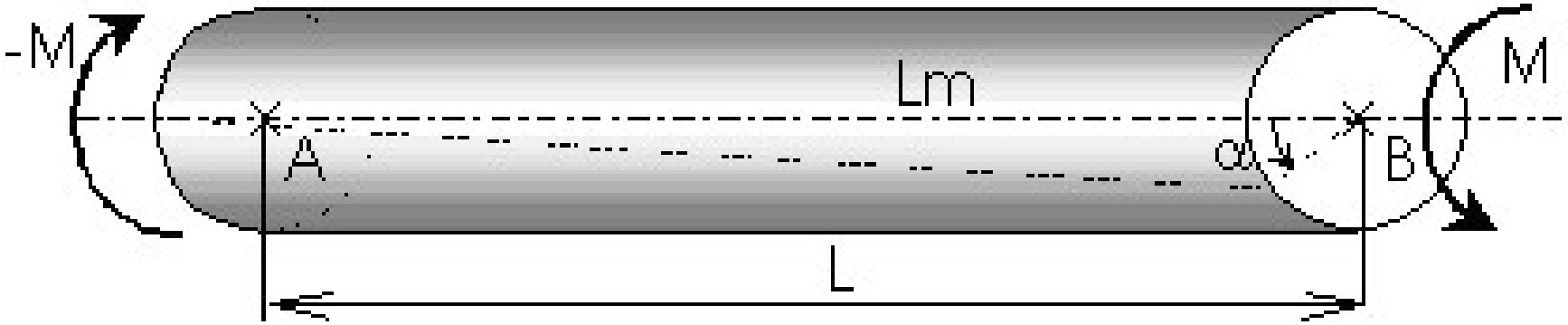
- Moments quadratiques utiles:

	I_{Gx}	I_{Gy}	$I_G = I_O$
	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$	$\frac{bh}{12}(b^2+h^2)$
	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{32}$
	$\frac{\pi}{64}(D^4-d^4)$	$\frac{\pi}{64}(D^4-d^4)$	$\frac{\pi}{32}(D^4-d^4)$

7-3 Torsion

1. Définition

Une poutre est sollicitée en torsion simple lorsqu'elle est soumise à ses deux extrémités à des liaisons dont les torseurs associés se réduisent à deux torseurs couples opposés dont les moments sont parallèles à l'axe du cylindre.
(on suppose la poutre comme cylindrique et de section circulaire constante)



Le moment M est appelé *moment de torsion*.

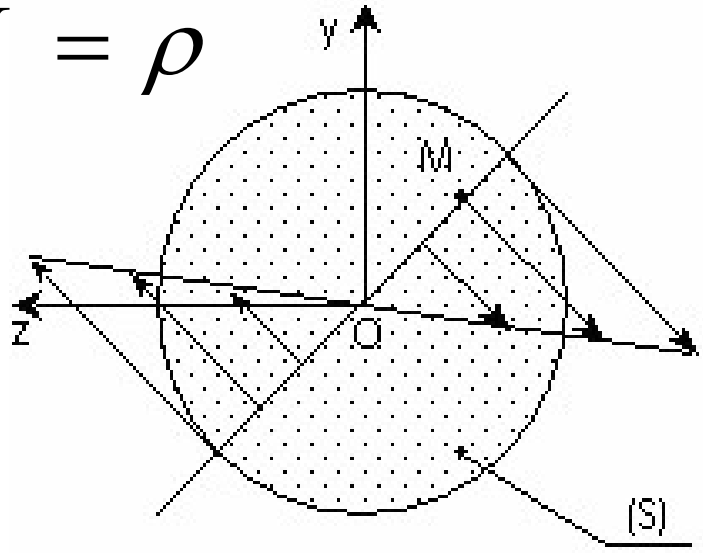
α l'angle de rotation entre les deux extrémités de la poutre.

θ : angle unitaire de torsion en rad/mm

2. contrainte de torsion

Soit $\theta = \frac{\alpha}{L}$ angle *unitaire* de torsion.

$$OM = \rho$$



ζ :contrainte tangentielle en N/mm²

G : module d'élasticité transversal en Mpa

θ : angle unitaire de torsion en rad/mm

ρ : rayon OM en mm

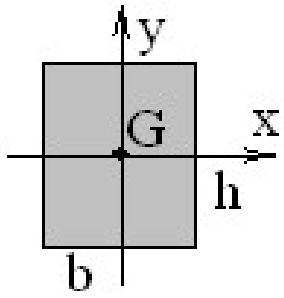
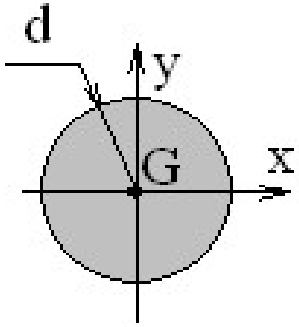
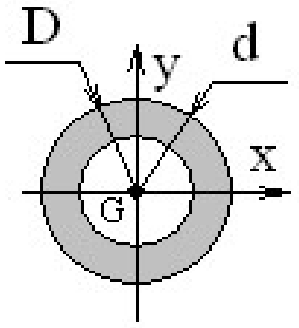
$$\tau = G \,.\theta\, .\rho$$

Moment quadratique

Le moment quadratique de la section S par rapport à l'axe (G,z) noté I_{Gz} est l'intégrale de la distance au carré d'un point de la section droite par rapport à l'axe (G,z). Cette grandeur ne dépend que de la section S.

$$I_{Gz} = \iint_S y^2 dS$$

- Moments quadratiques utiles:

	I_{Gx}	I_{Gy}	$I_G = I_O$
	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$	$\frac{bh}{12}(b^2+h^2)$
	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{32}$
	$\frac{\pi}{64}(D^4-d^4)$	$\frac{\pi}{64}(D^4-d^4)$	$\frac{\pi}{32}(D^4-d^4)$

$$M_t = G.\theta.I_0$$

M_t : Moment de torsion en N.mm
G : module d'élasticité transversal en Mpa
θ : angle unitaire de torsion en rad/mm
I_0 : moment quadratique par rapport au point O en mm^4

d'où :

$$\tau = \frac{M_t}{I_0 \cdot \rho}$$

7.4 Flexion

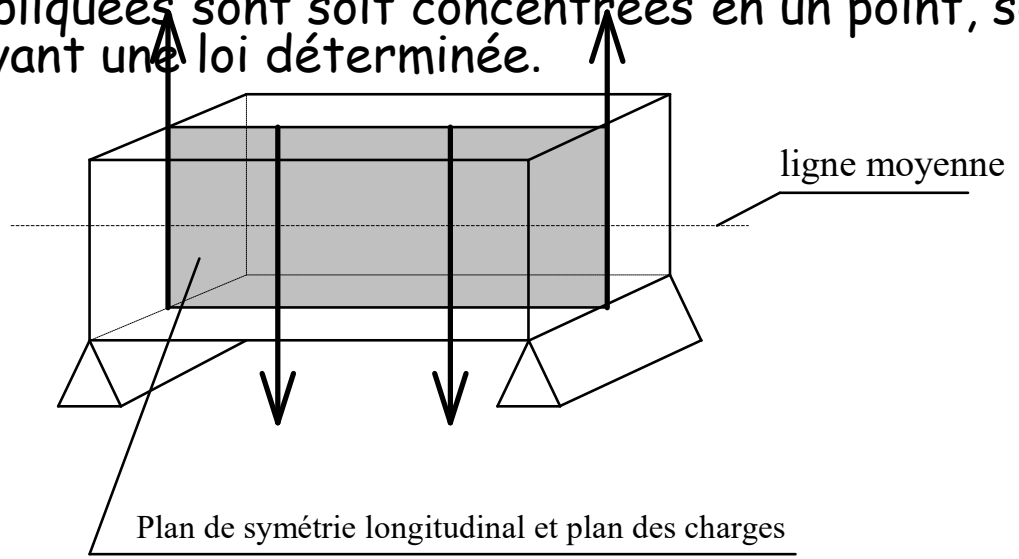
Il existe plusieurs types de flexions (pure, plane, déviée).

Nous limiterons notre étude au cas de la flexion plane simple.

1. Hypothèses:

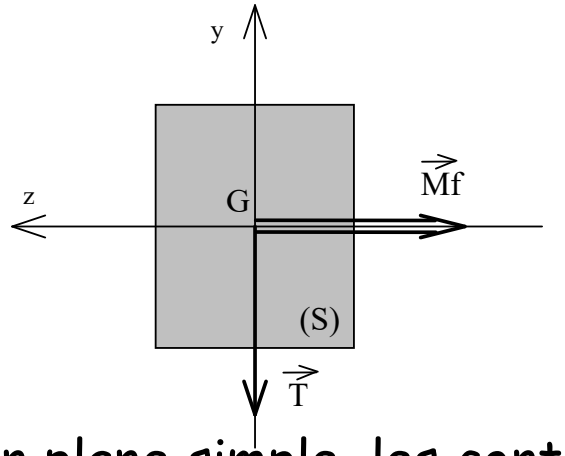
En plus des hypothèses déjà énoncées au début du cours de RDM, la flexion plane simple nous amène à supposer que :

- la ligne moyenne de la poutre est rectiligne
- la section droite de la poutre est rectiligne.
- la poutre admet un plan de symétrie longitudinal (voir fig.).
- toutes les forces appliquées à la poutre sont disposées perpendiculairement à la ligne moyenne et dans le plan de symétrie longitudinal (ou symétriquement par rapport à celui-ci).
- les forces appliquées sont soit concentrées en un point, soit réparties suivant une loi déterminée.



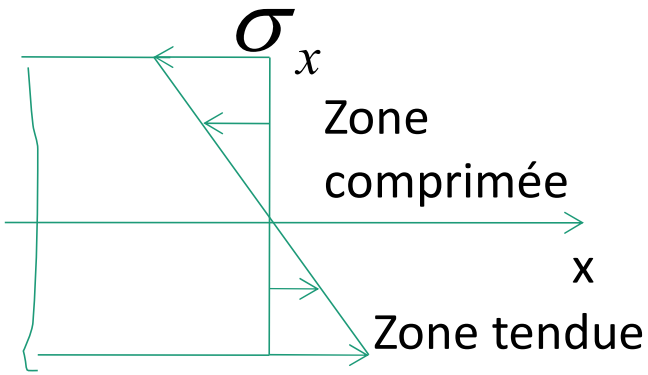
7.2 flexion plane simple

Une poutre est sollicitée en flexion plane simple lorsque le système des forces extérieures se réduit à un système coplanaire et que toutes les forces sont perpendiculaires à la fibre moyenne (voir ci-dessous).



7.3 Contraintes

Dans le cas de la flexion plane simple, les contraintes se réduisent essentiellement à des contraintes normales σ.
Les contraintes de cisaillement ζ sont négligeables.



La contrainte normale σ en un point M d'une section droite (s) est proportionnelle à la distance y entre ce point et le plan moyen passant par G.

$$\sigma = \frac{M_f}{I_z}.y$$

Avec:

σ : contrainte normale en Mpa
M_f : Moment de flexion en N.mm
I_z : moment quadratique de la section en mm^4
y : ordonnée du barycentre de la section en mm

$$\sigma = E.y.\theta$$

Avec:

E: module d'élasticité longitudinale en Mpa

7.4 Étude de la déformée d'une poutre

Cette étude permet de donner l'équation de la déformée de la poutre sous la forme y = f(x).
Elle est principalement basé sur la résolution de l'équation différentielle suivante :

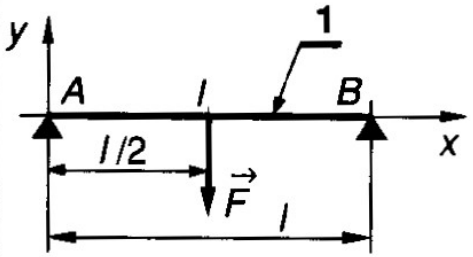
$$M_{fz} = E.I_{Gz}.y''$$

Il faut alors procéder à deux intégrations successives.
Les constantes d'intégration s'obtiennent grâce aux conditions aux limites (appuis, encastrements...).

exemple de conditions aux limites :

Appui simple	y = 0	
Encastrement	y = 0	y' = 0

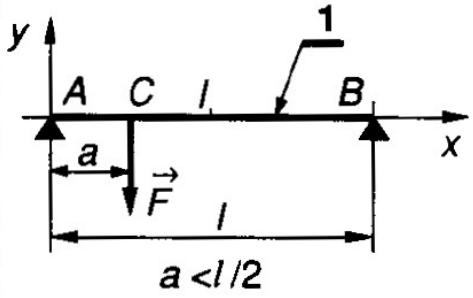
6.5. FORMULAIRE DES DÉFORMATIONS DE FLEXION PLANE SIMPLE



En I :

$$y_I = -\frac{\|\vec{F}\|\, l^3}{48EI(G,\vec{z})}$$

$$y'_A = -\frac{\|\vec{F}\|\, l^2}{16EI(G,\vec{z})}$$



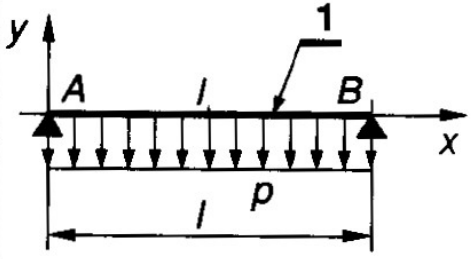
en C :

$$y_C = -\frac{\|\vec{F}\|\, a^2(l-a)^2}{3EI(G,\vec{z})\, l}$$

en l :

$$y_I = -\frac{\|\vec{F}\|\, a}{48EI(G,\vec{z})}(3l^2 - 4a^2)$$

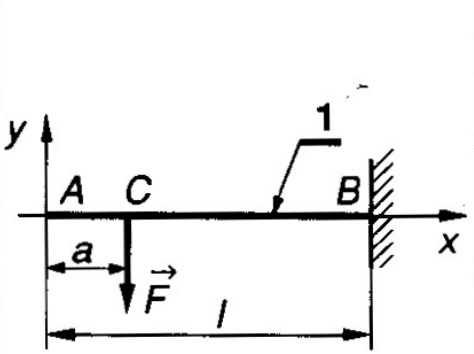
$$y'_A = -\frac{\|\vec{F}\|\, a(l-a)(2l-a)}{6EI(G,\vec{z})l}$$



en I :

$$y_I = -\frac{5pl^4}{384EI(G,\vec{z})}$$

$$y'_A = -\frac{pl^3}{24EI(G,\vec{z})}$$



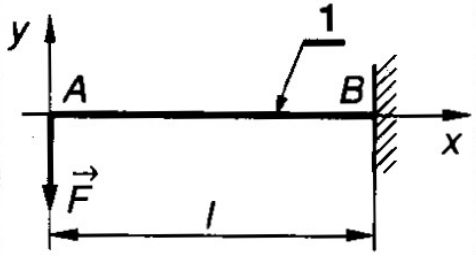
en A :

$$y_A = -\frac{\|\vec{F}\|}{6EI(G,\vec{z})}(l-a)^2(2l+a)$$

en C :

$$y_C = -\frac{\|\vec{F}\|}{3EI(G,\vec{z})}(l-a)^3$$

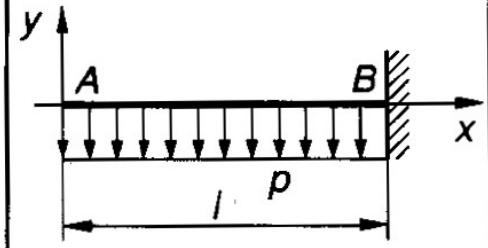
$$y'_A = y'_C = \frac{\|\vec{F}\|\,(l-a)^2}{2EI(G,\vec{z})}$$



en A :

$$y_A = -\frac{\|\vec{F}\|\, l^3}{3EI(G,\vec{z})}$$

$$y'_A = \frac{\|\vec{F}\|\, l^2}{2EI(G,\vec{z})}$$



en A :

$$y_A = -\frac{pl^4}{8EI(G,\vec{z})}$$

$$y'_A = \frac{pl^3}{6EI(G,\vec{z})}$$

Les sollicitations composées

Dans plusieurs cas d'utilisation, une poutre est sollicitée à plus qu'une sollicitation: torsion+flexion, flexion+ extension ou compression…etc, on parle alors de sollicitations composées. Dans ce cas les déformations géométriques et les contraintes résultantes sont obtenues par la somme vectorielle des déformations et les contraintes qui résultent de chacune des sollicitations simples. On applique alors le principe de superposition sauf dans les cas où les éléments ne sont pas compatibles comme celui de la flexion+torsion.

8.types Sollicitations composées

Type	***Exemple d'utilisation***
Flexion et torsion	arbre de transmission
Flexion et traction	vis
Flexion et compression	poteau long
Cisaillement et compression	pile de pont en rivière navigable
Cisaillement et traction	boulon précontraint

Exemple:flexion+torsion

Dans ce cas on ne peut utiliser la superposition car les contraintes de flexion sont normales et celles de torsion sont tangentielles. On pondère l'une avec l'autre et l'on réalise 2 études : l'une en flexion, l'autre en torsion.

Flexion : Moment Idéal de Flexion (utilisé pour le calcul).

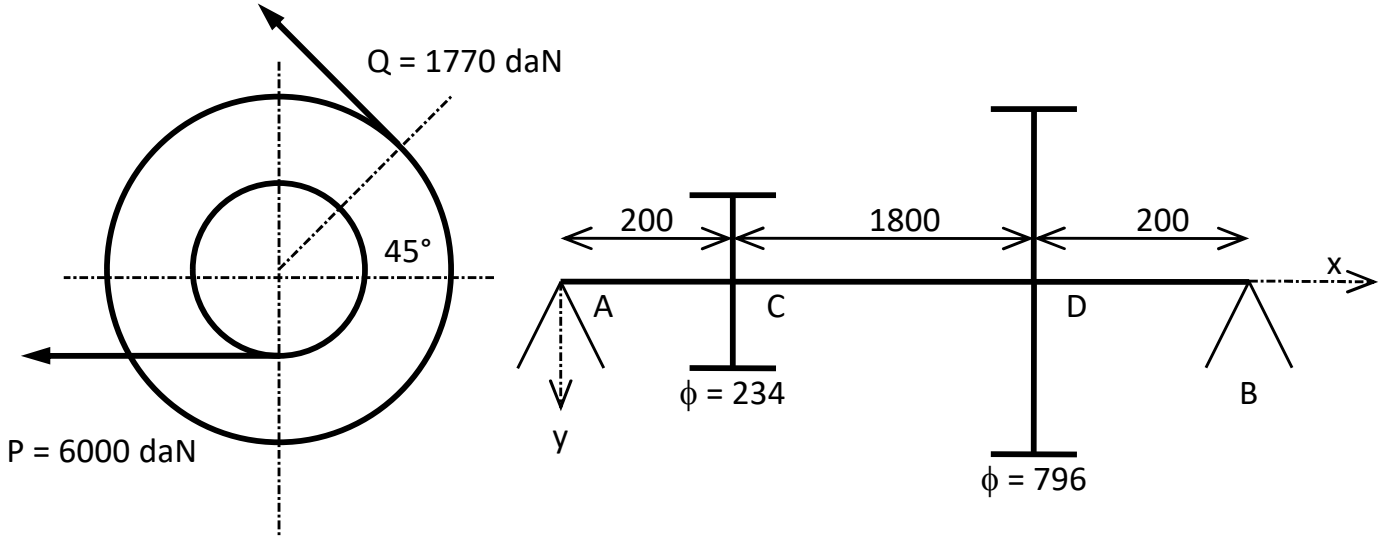
$$Mf_{idéal} = \frac{1}{2} \cdot Mf + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{Mf^2 + Mt^2}$$

Torsion : Moment Idéal de Torsion (utilisé pour le calcul).

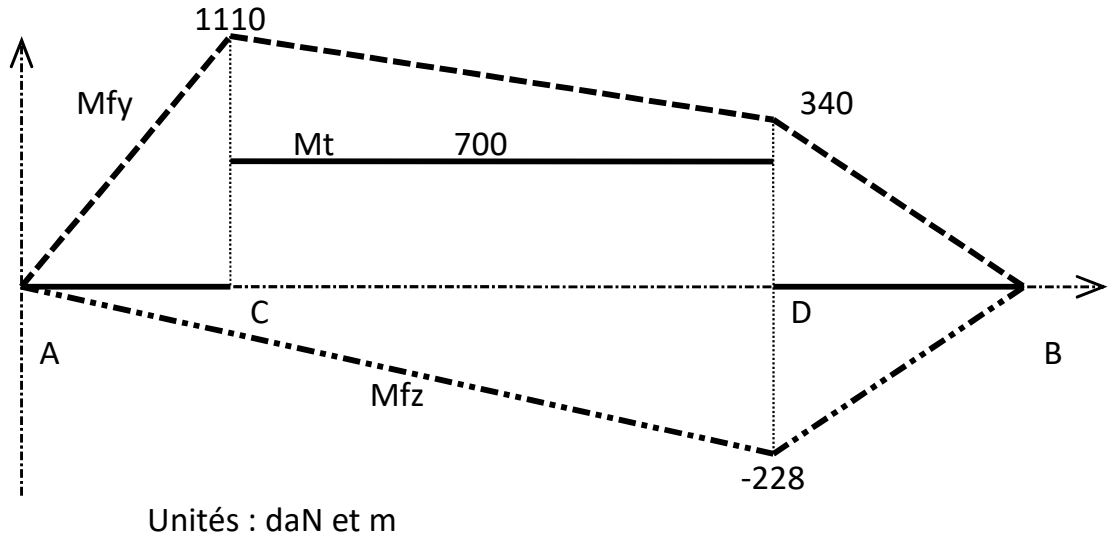
$$Mt_{idéal} = \sqrt{Mf^2 + Mt^2}$$

exemple :

On se propose de rechercher le diamètre (coef. Sécurité s = 4) de l'arbre plein, réalisé en XC32, représenté ci-dessous



Une étude préliminaire permet de réaliser les diagrammes suivants :



Commençons par rechercher le moment de flexion maximal.

$$Mf = \sqrt{Mfy^2 + Mfz^2}$$

en C : 1110 daN.m

en D : 409,4 daN.m

étude de flexion

$$Mf_{idéal} = \frac{1}{2} \cdot Mf + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{Mf^2 + Mt^2} = 1210.daN.m$$

On utilise alors la condition de résistance en flexion pour avoir le diamètre, à savoir :

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot s \cdot Mfi}{\pi \cdot \sigma_e}} = 115.mm$$

étude de torsion

$$Mt_{idéal} = \sqrt{Mf^2 + Mt^2} = 1310.daN.m$$

On utilise alors la condition de résistance en torsion pour avoir le diamètre, à savoir :

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot s \cdot Mti}{\pi \cdot \nu \cdot \sigma_e}} = 118.mm$$

On peut donc prendre un diamètre à partir de 118 mm, par exemple d = 120 mm.

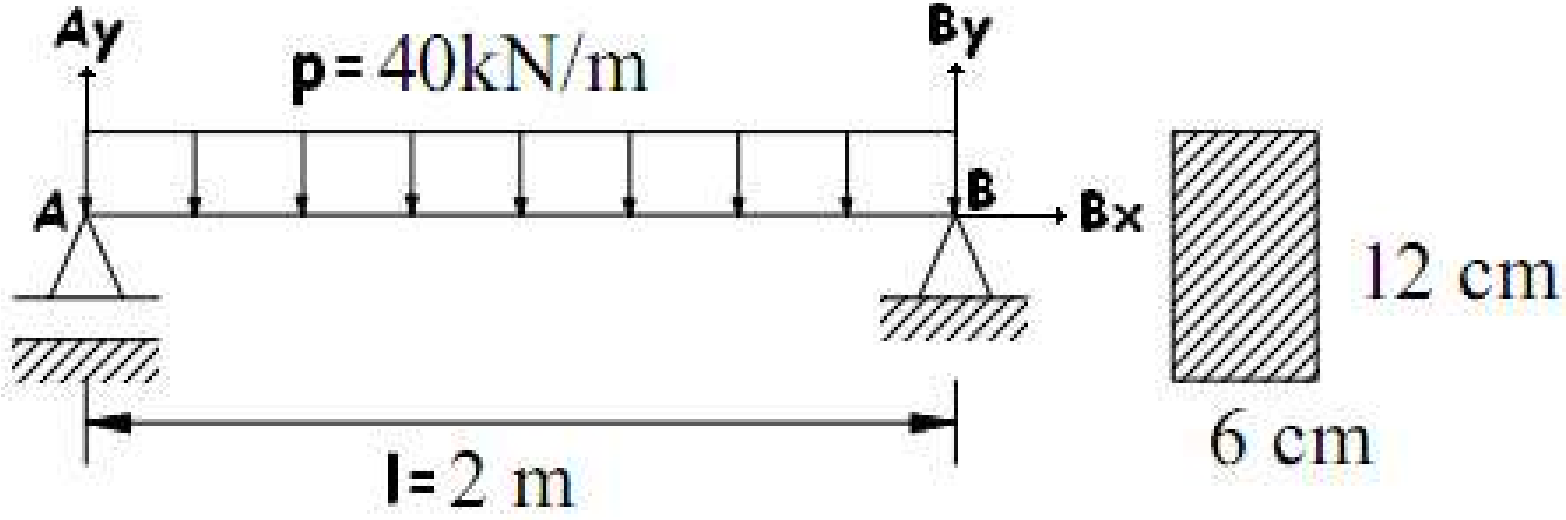
Exercice 1

On désire vérifier la résistance de la poutre si la contrainte admissible $[\sigma]=160\ N/mm^2$

1 Déterminer les éléments du torseur de cohesion

2 calculer la contrainte normale maximale et vérifier la condition de résistance

3 tracer les diagrammes,de l'effort tranchant, moment fléchissant et contrainte normale



Exercice

Solution:

Calcul des efforts extérieurs:

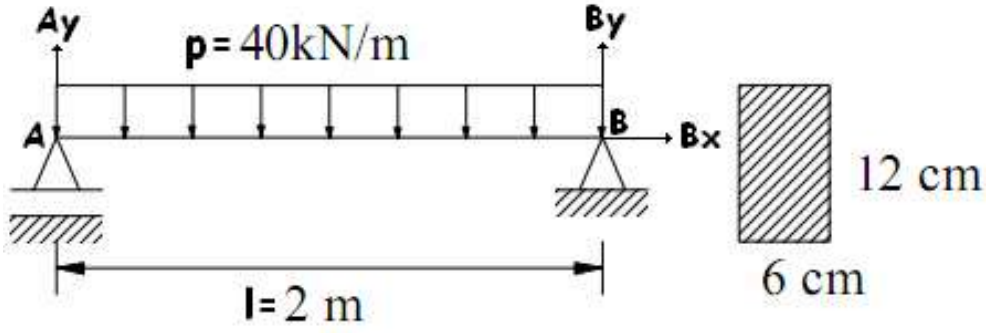
PFS

$$/x: \qquad B_x = 0$$

$$/y: \qquad A_y + B_y - pl = 0$$

$$M/_A: \qquad -pl \times \frac{l}{2} + B_y l = 0$$

$$\Rightarrow B_y = A_y = \frac{pl}{2}$$



On calcul ensuite les efforts internes:

On prend une section à la distance x de A, on détermine l'effort tranchant et le moment fléchissant

$$T_y(x) = -A_y + px$$

$$M_{fz}(x) = A_y x - px.\frac{x}{2}$$

$$pour \quad x = 0, \quad T_y = -\frac{pl}{2}, M_{fz} = 0$$

$$pour \quad x = l, \quad T_y = \frac{pl}{2}, M_{fz} = 0$$

$$pour \quad x = \frac{l}{2}, \quad T_y = 0, M_{fz} = \frac{pl^2}{8}$$

$$pour \quad x = 0, \quad T_y = -\frac{pl}{2}, M_{fz} = 0$$

$$pour \quad x = l, \quad T_y = \frac{pl}{2}, M_{fz} = 0$$

$$pour \quad x = \frac{l}{2}, \quad T_y = 0, M_{fz} = \frac{pl^2}{8}$$

Les diagrammes des efforts est le suivant:

Calcul de la contrainte maximale:

Le moment maximal est à mi travée:

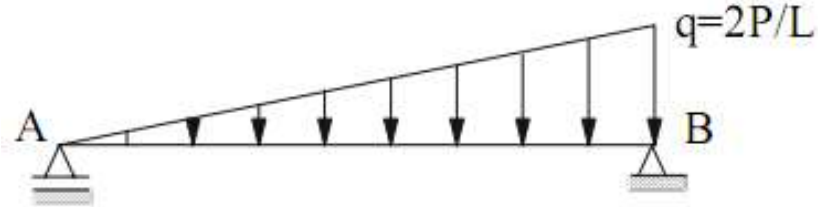
$$M_{\max} = \frac{pl^2}{8} = \frac{40 \times 4}{8} = 20KN.m$$

$$I_Z = \frac{60 \times 120^3}{12} = 860 \times 10^4 mm^2$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} y_{\max}}{I_z} = \frac{2 \times 10^6 \times 60}{864 \times 10^4} = 138.8N/mm^2 \langle 160N/mm^2$$

Exercice2:cas d'une charge triangulairement repartie

Déterminer les efforts internes et externes de la poutre sollicitée par une charge triangulairement repartie

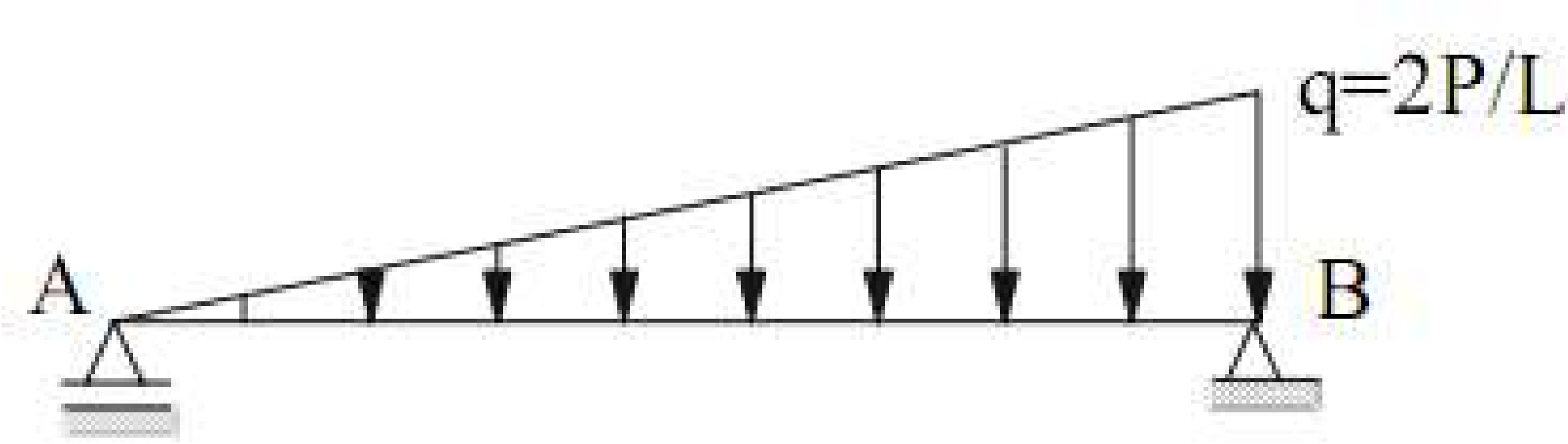


Solution:

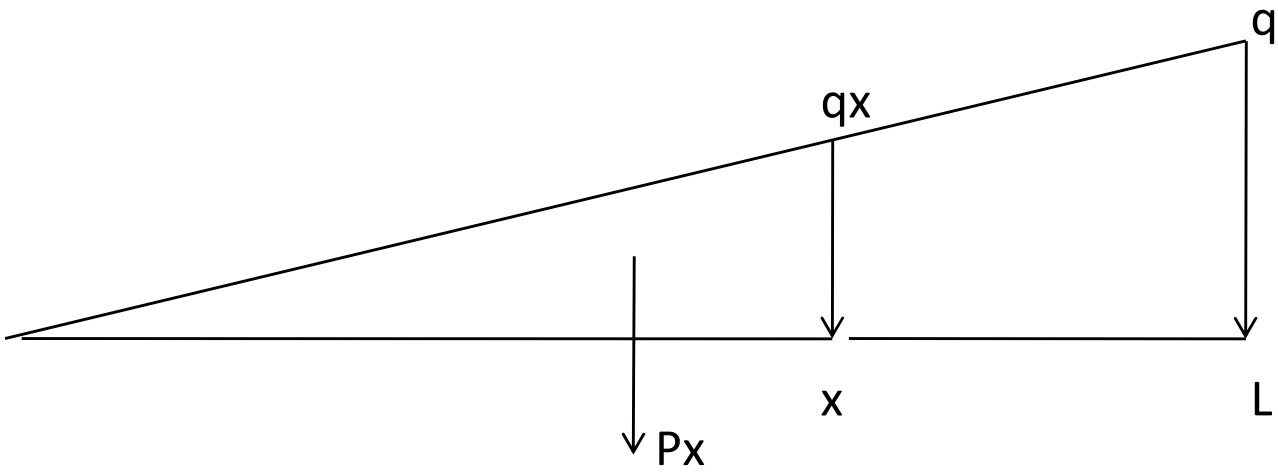
Détermination des réactions:

Exercice2:cas d'une charge triangulairement repartie

Mêmes questions que l'exercice 1



Isolons un tronçon de longueur x et calculons la charge Px agissant sur le tronçon :



$$\frac{q_x}{q} = \frac{x}{L} \Rightarrow q_x = q\frac{x}{L}$$

$$P_x = q\frac{x}{L}\frac{x}{2}$$

Solution:

Détermination des réactions:

$$\sum M/_A = 0 \Rightarrow R_B L - P\frac{2L}{3} = 0$$

$$R_B L - q\frac{L}{2}\frac{2L}{3} = 0 \Rightarrow R_B = \frac{qL}{3} = \frac{2}{3}P$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow R_A + R_B - \frac{qL}{2} = 0 \Rightarrow R_A = \frac{qL}{6} = \frac{P}{3}$$

Expressions des efforts internes:

$$T + \frac{P}{3} - q \times \frac{x}{L} \times \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow T_y = -\frac{P}{3} + \frac{qx^2}{2L}$$

$$\Rightarrow T_y = -\frac{P}{3} + \frac{Px^2}{L^2}$$

$$T_y(0) = -\frac{P}{3} \quad , \quad T_y(L) = +\frac{2P}{3}$$

$$T_y(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

$$M - \frac{P}{3}x + q \times \frac{x}{L} \times \frac{x}{2} \times \frac{x}{3} = 0 \Rightarrow M = \frac{P}{3} - \frac{qx^3}{6L} \Rightarrow M = \frac{P}{3}x - \frac{Px^3}{3L^2}$$

$$M(0) = 0, \qquad M(L) = 0, \qquad M_{\max} = M(\frac{L}{\sqrt{3}}) = 0.08PL$$

$$T_y = -\frac{P}{3} + \frac{qx^2}{2L}$$

$$T_y = -\frac{P}{3} + \frac{Px^2}{L^2}$$

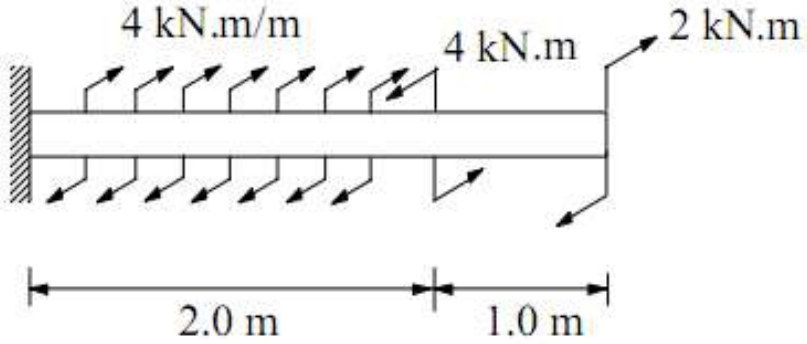
$$M_{fz} = \frac{P}{3}x - \frac{qx^3}{6L} \Rightarrow M_{fz} = \frac{P}{3}x - \frac{Px^3}{3L^2}$$

$$M_{\max} = M\left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right) = 0.08PL$$

Exercices(Torsion)

Exercice1 :

Vérifier la résistance de la barre sachant que le diamètre d=100 mm,G=8x10 N/mm² ,[ζ]=0.7, [σ]=40 N/mm² et [ϕ]/L=0.3°/m



Solution:

On trace le diagramme du moment de torsion pour déterminer la valeur maximale

A l'encastrement:

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow M + 2 - 4 + 4 \times 2 = 0$$

$$M = -6kN.m$$

Tronçon 1: 0≤x≤2

$$M = 4x - 6$$

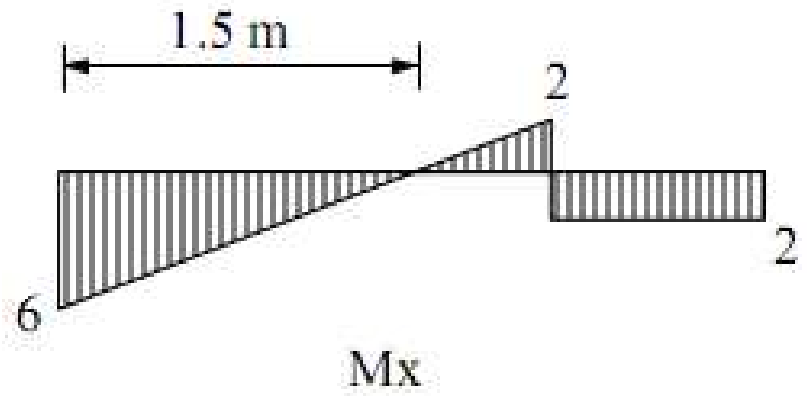
$$M(0) = -6kN.m, \quad M(2) = 2kN.m$$

Tronçon 2: 0≤x≤1

$$M = 2kN.m$$

$$d'où \qquad M_{\max} = 6kN.m$$

Diagramme du moment de torsion:



Vérification a la résistance :

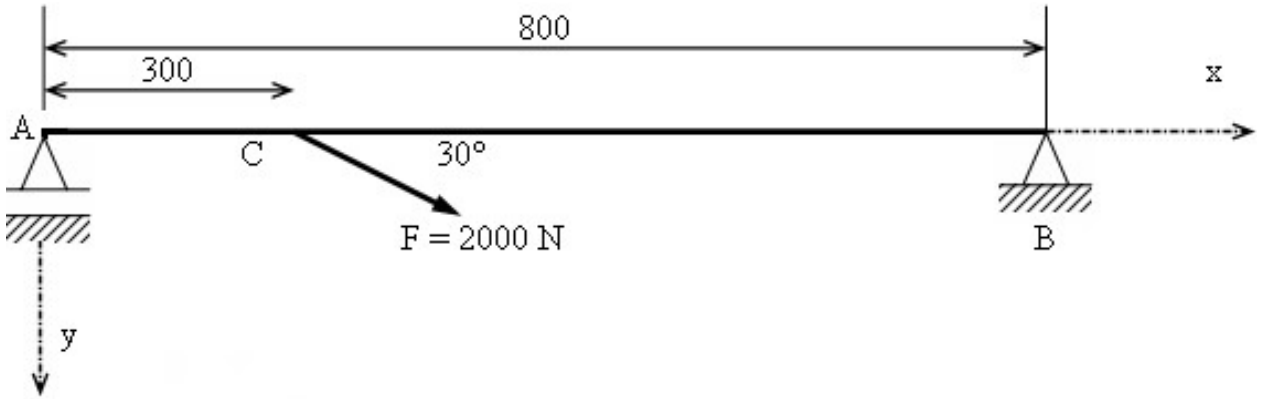
$$W_t = \frac{I_P}{d/2} = \frac{\pi d^4}{32 \times d/2} = \frac{\pi}{16} d^3$$

$$\tau_{\max} = \frac{6 \times 16 \times 10^6}{\pi \times 10^6}$$

Exercices(flexion+extension)

Exercice:

On se propose d'étudier une poutre de section rectangulaire (12x36), sollicitée dans les conditions ci-dessous :



Solution:

•On isole la poutre, bilan des actions extérieures, P.F.S., afin de connaître les actions extérieures, ici on a :

$$\begin{cases} A_X + P.\cos 30 = 0 \\ A_Y + B + P.\sin 30 = 0 \\ 800.B + 300.P.\sin 30 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -375N \\ A_x = -1732N \\ A_y = -625N \end{cases}$$

•On recherche l'effort normal, tranchant et le moment:

Tronçon AC.

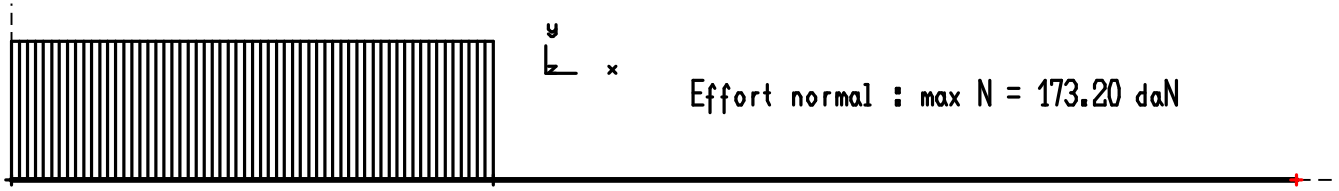
$$N = -A_x = 1732N$$
$$T_y = Ay = -625N$$
$$M = -A_y.x$$

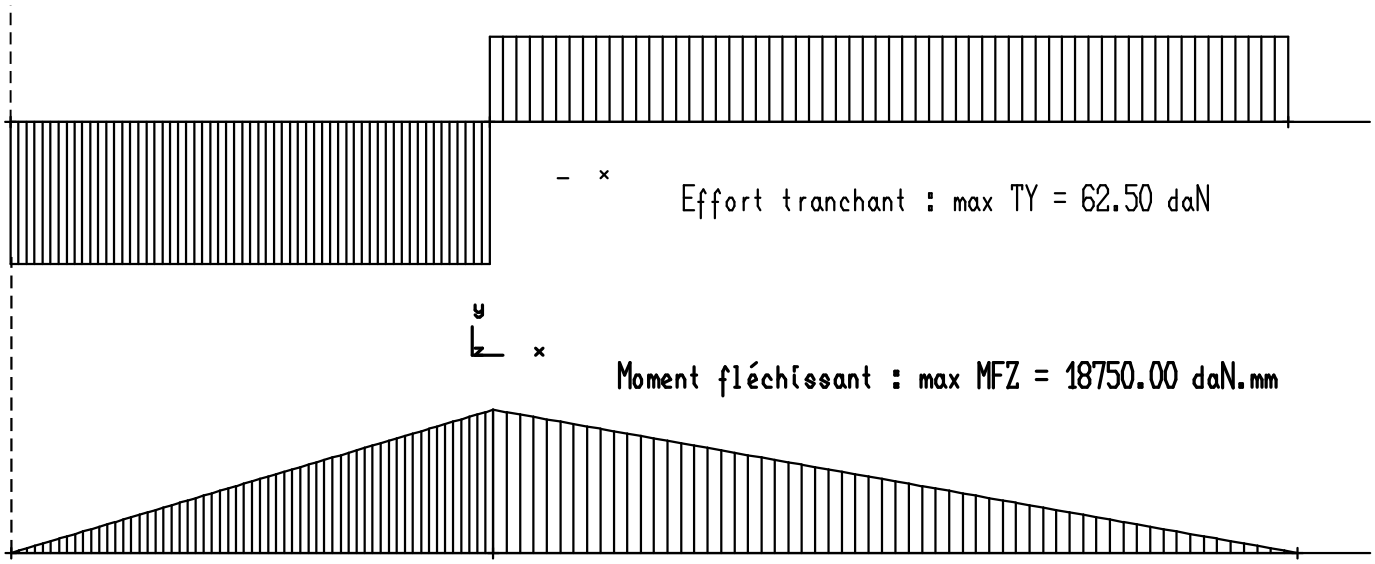
Tronçon BC.

$$N = -A_x - F\cos 30 = 0$$
$$T_y = -Ay + F\sin 30 = 375N$$
$$M = -A_y.x + F\sin 30(x - 300)$$

On est bien en présence d'une sollicitation d'extension et de flexion simple.

•On obtient les diagrammes suivants:





On trouve que la section la plus sollicitée se situe à l'abscisse x = 300.

•On recherche alors les contraintes séparément, à savoir :

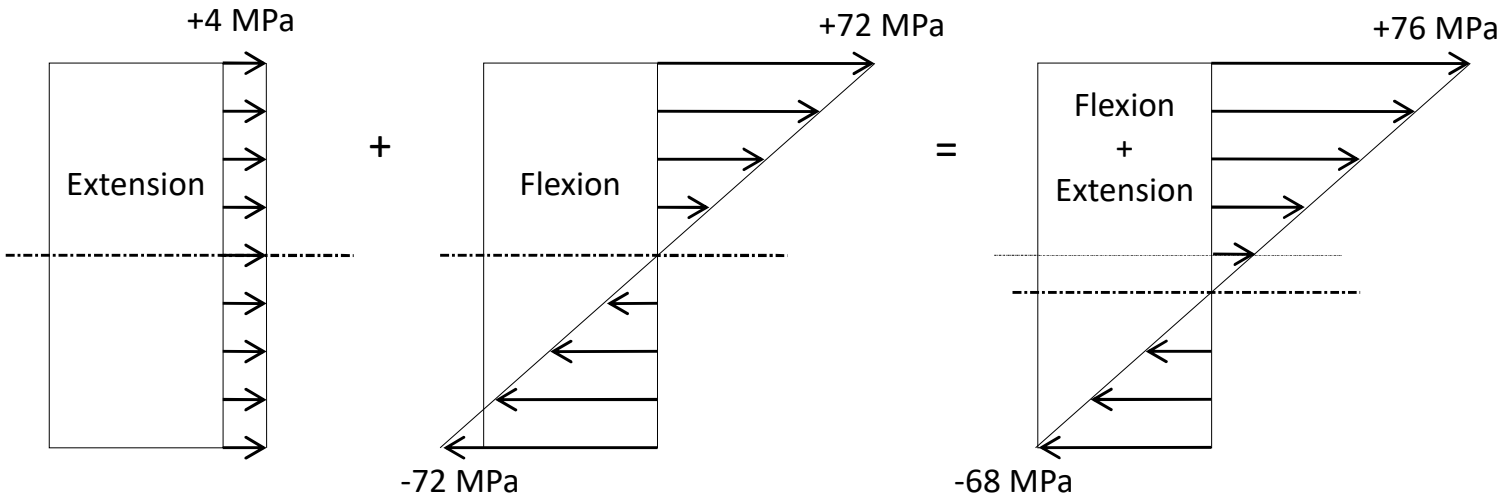
contrainte d'extension.

$$\sigma_{ext} = \frac{N}{S} = 4.\,MPa$$

contrainte de flexion

$$\sigma_{flex} = \frac{Mf}{I_G} \cdot \rho = \frac{12.\,Mf}{b.h^3} \cdot \frac{h}{2} = 72.\,MPa$$

- On procède ensuite à la superposition en additionnant les contraintes.



On observe dans la superposition un décalage de la fibre neutre.